Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima, Maroc

Mathématiques pour les Classes Préparatoires

–Cours et exercices d'Algèbre II et III–
Algèbre linéaire, Résolution de systèmes linéaires,
Algèbre Quadratique et Espaces Hermitiens

Mohamed ADDAM
Professeur de Mathématiques

École Nationale des Sciences Appliquées d'Al Hoceima
–ENSAH–
addam.mohamed@gmail.com
m.addam@uae.ac.ma

Année Universitaire 2019/2020

18 Mars 2020

Table des matières

Chapitre 1

Réduction des endomorphismes et Éléments propres

Dans ce chapitre, on suppose que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.

1.1 Multiplication matricielle : Algorithmes

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice de type $m \times n$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de type $n \times p$.
Le produit $A \cdot B$ est la matrice C de type $m \times p$ dont les coefficients

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{1,2} + \ldots + a_{i,n}b_{n,j}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq p.$$

Le coefficient $c_{i,j}$ est obtenu en faisant le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Remarque 1.1.1 *Lorsque $p = 1$ alors la matrice B serait un vecteur de type $m \times 1$. Dans ce cas, le produit $A \cdot B$ serait un vecteur c de type $m \times 1$ dont les coefficients c_i sont donnés par*

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_j = a_{i,1}b_1 + a_{i,2}b_2 + \ldots + a_{i,n}b_n, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Remarque 1.1.2
1. *Le produit matriciel n'est pas commutatif en général.*
2. *Le produit $A \cdot B$ peut être défini sans $B \cdot A$ le soit.*

```
        Pour chaque ligne i=1...m, faire
              pour chaque colonne j=1...p, faire
              Pour k=1...n, faire
                 a[i,j]:=a[i,j]+a[i,k]*a[k,j]
              Fin pour k
              Fin pour j
        Fin pour i
```

Algorithme :

```
  For i=1..m,
        For j=1..p,
              For k=1..n,
                 a[i,j]:=a[i,j]+a[i,k]*a[k,j]
              End k
        End j
  End j
```

1.2 Réduction des endomorphismes et des martices carrées

Dans cette partie, on désigne par E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, par e l'endomorphisme identique de E, par $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et par I la matrice unité. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ et A la matrice associée à f relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On dit que la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est identifiée à l'endomorphisme f.

1.2.1 Valeurs propres, polynôme caractéristique et polynôme minimal

Définition 1.2.1 *un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* **valeur propre** *d'un endomorphisme u de E (resp. d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) s'il existe un vecteur x non nul (resp. une matrice colone X non nulle) tel que*

$$u(x) = \lambda.x, \quad (\textit{resp}.AX = \lambda X)$$

ou encore si l'endomorphisme $u - \lambda e$ (resp. la matrice $A - \lambda \mathrm{I}$) n'est pas inversible.

Exemple 1.2.1 1. *Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$\begin{cases} u(x) & = 2y, \\ u(y) & = x \end{cases}$$

$\sqrt{2}$ *et* $-\sqrt{2}$ *sont les valeurs propres de u puisque det$(u \pm \sqrt{2}e) = 0$*

2. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de A sont 2 et -3 car det$(A - 2\mathrm{I}) = 0$ et det$(A + 3\mathrm{I}) = 0$ puisque

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad A + 3I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.2 *Soit u un endomorphisme de E.*

1. *On appelle le* **polynôme caractéristique** *de u (resp. d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le polynôme suivant :*

$$P(\lambda) = \textit{det}(u - \lambda e), \quad (\textit{resp.}P_A(\lambda) = \textit{det}(A - \lambda \mathrm{I}))$$

2. *Les valeurs propres d'un endomorphisme u de E sont les racines du* **polynôme caractéristique** *de u (resp. de la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

Exemple 1.2.2 1. *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est

$$P(\lambda) = \textit{det}\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-3-\lambda) + 4,$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2.$$

Pour trouver les valeurs propres de la matrice A il suffit de résoudre l'équation

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

2. *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice M est

$$P_M(\lambda) = \textit{det}\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 & 0 \\ 1 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix},$$

$$P_M(\lambda) = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3-\lambda & 0 \end{vmatrix},$$

$$P_M(\lambda) = (2-\lambda)[(-3-\lambda)(3-\lambda) - 2] + 4[-(3-\lambda)],$$

pour trouver les valeurs propres de la matrice M il suffit de résoudre l'équation

$$P_M(\lambda) = 0.$$

Remarque 1.2.1 *Soit u un endomorphisme de E et U la matrice de u dans une base arbitraire de E alors on a*

$$P(\lambda) = \textit{det}(u - \lambda e) = \textit{det}(\mathrm{U} - \lambda \mathrm{I}).$$

Théorème 1.2.1 *(***Cayley-Hamilton***)*
Soit u un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. *Si le polynôme caractéristique P de u se décompose dans $\mathbb{K}$ en facteurs du premier degré, alors $P(u) = 0$.*
2. *Si le polynôme caractéristique Q de A se décompose dans $\mathbb{K}$ en facteurs du premier degré, alors $Q(A) = 0$.*

Démonstration. En exercice. □

Exemple 1.2.3 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2-2 & 4-4+0 \\ -1+1+0 & 5-3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 1.2.3 *Soit u un endomorphisme de E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
On appelle **polynôme minimal** *de u (resp. de A) un polynôme Q vérifiant :*

i) *Q est de plus petit degré divisant le polynôme caractéristique P de u (resp. de A).*

ii) *$Q(u) = 0$ (resp. $Q(A) = 0$).*

Exemple 1.2.4 *On considère une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique*

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

Si $(A - 2I)(A - 3I) = 0$, alors le polynôme minimale de A est $Q(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

1.2.2 Vecteurs propres et Sous-espace propres

Définition 1.2.4 *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *Si λ est une valeur propre de l'endomorphisme u, l'ensemble des solutions de l'équation*

$$u(x) = \lambda x$$

est un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_\lambda$ de E dit **sous-espace propre** *associé à λ. Les éléments non nuls de $\mathcal{H}_\lambda$ sont les* **vecteurs propres** *associés à λ.*
Le sous-espace propre $\mathcal{H}_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda e)$, le noyau de l'endomorphisme $(u - \lambda e)$ de E.

2. *Si λ est une valeur propre de la matrice A, l'ensemble des solutions de l'équation*

$$Mx = \lambda x$$

est un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_\lambda$ de $\mathbb{K}^n$ dit **sous-espace propre** *associé à λ. Les éléments non nuls de $\mathcal{H}_\lambda$ sont les* **vecteurs propres** *associés à λ.*
Si f était l'endomorphisme associé à la matrice A alors $\mathcal{H}_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda e)$.

Exemple 1.2.5 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de la matrice A est $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $\lambda_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$.

$$\mathcal{H}_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}\,(f + 2e)$$

$$\mathcal{H}_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}\,(f - e)$$

ou f est l'endomorphisme associé à A défini par

$$\begin{cases} f(x) & = 2x - 4y, \\ f(y) & = x - 3y, \end{cases}$$

et e est l'endomorphisme unité.

Proposition 1.2.1 *Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-e.v. E et A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associée à u.*

1. *Les valeurs propres de u sont les mêmes que celles de A.*
2. *Les vecteurs propres $v_1, v_2, \ldots, v_k$ associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont linéairement indépendants.*
3. *Si $\mathcal{H}_1 = \mathrm{Ker}(u - \lambda_1 e), \mathcal{H}_2 = \mathrm{Ker}(u - \lambda_2 e), \ldots, \mathcal{H}_k = \mathrm{Ker}(u - \lambda_k e)$ sont respectivement les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, alors la sommes $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \ldots + \mathcal{H}_k$ est une somme directe.*
4. *La réunion d'une base de $\mathcal{H}_1$, d'une base de $\mathcal{H}_2$,. . ., d'une base de $\mathcal{H}_k$ est une base de $\mathcal{H}$.*

Démonstration. Laisser en exercice. □

1.2.3 Matrices semblables

Définition 1.2.5 *Deux matrices sont semblables si et seulement si elles constituent deux matrices représentatives du même endomorphisme dans deux bases (éventuellement) différentes. Autrement dit, on dit que deux matrices A et B sont semblables si et seeulement si il existe une matrice inversible P telle que*

$$A = P^{-1}BP.$$

Exemple 1.2.6 *Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ sont semblables.*

En effet, il existe une matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.2.2 *On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante :*

$$A \, \mathcal{R} \, B \iff \exists P \text{ une matrice inversible telle que } A = P^{-1}BP.$$

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 1.2.2 *Deux matrices semblables A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe une matrice inversible P telle que

$$A = P^{-1}BP.$$

On a

$$A - \lambda I = P^{-1}BP - \lambda I = P^{-1}BP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(B - \lambda I)P,$$

alors

$$\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}(B - \lambda I)P) = \det(P^{-1})\det(B - \lambda I)\det(P)$$

d'où

$$\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)\frac{\det(P)}{\det(P)} = \det(B - \lambda I).$$

□

Corollaire 1.2.1 *Deux matrices semblables A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont les mêmes valeurs propres.*

1.2.4 Matrices diagonalisables : diagonalisation de matrices

Définition 1.2.6 *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. une matrice $A \in \mathbb{K}^{(n\times n)}$) est* **diagonalisable** *s'il existe une base de E (resp. de $\mathbb{K}^n$) dans laquelle la matrice de u (resp. la matrice $P^{-1}AP$ transformée de A) est diagonale.*

Définition 1.2.7 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que*

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A comptées avec leurs ordres de multiplicité.
Dans ce cas, chaque vecteur colonne w de la matrice P est un vecteur propre pour la matrice A, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ sur la diagonale de D tel que $A.w = \lambda.w$.

Exemple 1.2.7 *Les valeurs propres de la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1 + \mathrm{i}$ *et* $\lambda_3 = 1 - \mathrm{i}$.
Les veteurs propres associés à λ_1, λ_2 *et* λ_3 *sont respectivement*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad et \quad V_3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $P = (V_1|V_2|V_3)$ *donnée par*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -(1+\mathrm{i}) & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

paar un calcul simple, on trouve

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -(1+\mathrm{i}) & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.3 *Diagonaliser une matrice carrée* A, *c'est trouver une matrice inversible* P *et une matrice diagonale* D *telles que* $A = PDP^{-1}$.

Proposition 1.2.3 *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *La matrice* A *est diagonalisable si et seulement si*

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(\mathcal{H}_\lambda) = n.$$

Théorème 1.2.2 *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *et* $A \in \mathbb{K}^{(n\times n)}$ *une matrice.*

1. u *est diagonalisable si et seulement si il existe une base de l'espace* E *formée de vecteurs propres de* u *ou encore si et seulement si les sous-espaces propres de* u *engendre l'espace* E.
2. A *est diagonalisable si et seulement si il existe une base de l'espace* $\mathbb{K}^n$ *formée de vecteurs propres de* A *ou encore si et seulement si les sous-espaces propres de* A *engendre l'espace* $\mathbb{K}^n$.
3. *Si le polynôme caractéristique* $P(x)$ *(resp.* $P_A(x)$ *de* u *(resp. de* A*) admet* n *zéros distincts dans* $\mathbb{K}$, *alors l'endomorphisme* u *(resp.* A*) est diagonalisable.*

1.2.5 Trigonalisation des matrices, matrices triangularisables

Définition 1.2.8 *On appelle matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) une matrice dont tous les éléments situés strictement au-dessous (resp. stricte- ment au-dessus) de la diagonale principale sont nuls.*

Remarque 1.2.4 *Une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.*

Définition 1.2.9 *Un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ *(resp. une matrice* $A \in \mathbb{K}^{(n\times n)}$*) est* **triangularisable** *s'il existe une base de* E *(resp. de* $\mathbb{K}^n$*) dans laquelle la matrice de* u *(resp. la matrice* $P^{-1}AP$ *transformée de* A*) est triangulaire.*

Définition 1.2.10 *On dit qu'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est* **trigonalisable** *si et seulement si il existe une matrice inversible* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *inversible tel que* $P^{-1}AP$ *soit triangulaire supérieure.*

Théorème 1.2.3 *Toute matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *est trigonalisable.*

1.2.6 Réduction de Jordan

Définition 1.2.11 *On appelle bloc de Jordan une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où λ est un réel quelconque. La diagonale principale contient des λ, on trouve des 1 au-dessus de cette diagonale, les autres éléments de la matrice sont nuls.
**Le bloc de Jordan de taille $n \geq 1$ et dont l'élément sur la diagonale principale est λ est noté $J_n(\lambda)$.*

Exemple 1.2.8 1. *$J_1(8) = 8$ est un bloc de Jordan de type 1×1.*

2. $J_4(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *est un bloc de Jordan de type 4×4.*
3. $J_2(-2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *est un bloc de Jordan de type 2×2.*

Définition 1.2.12 *On appelle matrice diagonale par blocs une matrice formée d'une diagonale de matrices carrées, non nécessairement de même taille. Les éléments non situés dans ces matrices sont nuls.*
**On note diag$(A_1; A_2; \dots; A_p)$ la matrice dont les blocs diagonaux sont $A_1, A_2, \dots, A_p$.*

Exemple 1.2.9 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \text{diag}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}\right)$,

2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix} = \text{diag}\left((1), \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}\right)$,
3. $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{diag}\left((3), \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Définition 1.2.13 *On appelle matrice de Jordan une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont des blocs de Jordan.*

Définition 1.2.14 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle réduite de Jordan de A toute matrice de Jordan J telle qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PJP^{-1}$.*

Théorème 1.2.4 *(***Réduction de Jordan***)*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_3$ les valeurs propres de la matrice A. On note ν_i l'ordre de multiplicité de λ_i dans le polynôme caractéristique P_A de A.
**La matrice A admet une réduite de Jordan J et une seule (à l'ordre des blocs près).*
**Tout bloc de la réduite de Jordan de A est de la forme $J_k(\lambda_i)$ où $\lambda_i \in Sp(A)$ et $1 \leq k \leq \nu_i$.*
**Sur la diagonale principale de la réduite de Jordan, on trouve les valeurs propres de A comptées avec leur multiplicité : λ_i apparaît ν_i fois.*

Théorème 1.2.5 *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathbb{K}^{(n\times n)}$ une matrice.*

1. *u est triangularisable si et seulement si le polynôme caractéristique $P(x)$ de u se décompose dans $\mathbb{K}$ en facteurs du premier degré.*
2. *A est triangularisable si et seulement si le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A se décompose dans $\mathbb{K}$ en facteurs du premier degré.*
3. *Dans ce cas, il existe une base de E (resp. de $\mathbb{K}^n$) telle que la matrice de u dans cette base (resp. la matrice $P^{-1}AP$ transformée de A) a la forme de Jordan :*

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_q \end{pmatrix}, \quad \textit{où} \quad J_p = \begin{pmatrix} \lambda_p & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

(Les λ_p sont les valeurs propres de u ou de A ; plusieurs matrices J_p peuvent avoir la même valeurs λ_p dans la diagonale.)

Exercice 1.2.1 *Soit A la matrice donnée par*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que A n'est pas diagonalisable.*
2. *Donner la réduite de Jordan de A.*

1.3 Spectre et rayon spectral d'une matrice, Matrice positive

1.3.1 Spectre et rayon spectral d'une matrice

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée.

1. La **trace** de A est $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.
2. Les valeurs propres de A sont les n racines réelles ou complexes $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ du polynôme caractéristique P de A. Le **spectre** de A, noté $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble de tous les valeurs propres de A :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_i : \ 1 \leq i \leq n\}$$

3. La matrice A est **diagonale** si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, on la note

$$A = \mathrm{diag}(a_{ii}) = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

On rappelle les propriétés suivantes :

1. $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, dét$(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
2. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
3. dét$(AB) =$ dét$(BA) =$ dét(A)dét(B).

Définition 1.3.1 *On appelle le rayon spectral de la matrice A, noté $\varrho(A)$, le nombre réel positif*

$$\varrho(A) = \max\{|\lambda_i| :\ 1 \leq i \leq n\}$$

Définition 1.3.2 *Une matrice A est*

1. **Symétrique** *si A est réelle et $A = A^T$;*
2. **hermitienne** *si $A = A^*$;*
3. **Orthogonale** *si A est réelle et $AA^T = A^T A = I$;*
4. **Unitaire** *si $AA^* = A^* A = I$;*
5. **Normale** *si $AA^* = A^* A$.*

une matrice A est dite **singulière** *si elle n'est pas inversible.*

Propriété 1.3.1 *Si A et B sont deux matrices inversibles, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

1.3.2 Matrice positive et matrice définie positive

Définition 1.3.3 *Soit A une matrice*

1. *La matrice A est* **définie positive** *si*

$$(Ax, x) > 0, \qquad \forall x \in E - \{0\}$$

2. *La matrice A est* **positive** *où* **semi-définie positive** *si*

$$(Ax, x) \geq 0, \qquad \forall x \in E - \{0\}$$

Théorème 1.3.1 *Une matrice hermitienne A est définie positive (resp. positive), si et seulement si toutes ses valeurs propres sont > 0 (resp. ≥ 0).*

Démonstration. soit A une matrice hermitienne et $x \neq 0$ un vecteur dans E.

$$(Ax, x) = \lambda(x, x) = \lambda\|x\|_E$$

□

1.4 Exercices

Exercice 1.4.1 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose que la matrice A a une seule valeur propre double λ.*

1. *Montrer qu'on peut trouver une matrice B semblable à A égale à l'une des deux matrices suivantes :* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
2. *Calculer B^n.*

Exercice 1.4.2 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*
3. *Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.*
4. *Calculer $(A - 2I_3)^2$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 1.4.3 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A. Montrer que f est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*
3. *Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle f est triangulaire supérieure.*
4. *En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exercice 1.4.4 *On considère la maatrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de M.*
2. *La matrice M est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?*
3. *Déterminer une matrice inversible P telle que la matrice $J = P^{-1}MP$ soit de la forme de Jordan.*
4. *Calculer J^n et en déduire la valeur de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Chapitre 2

Application de la réduction d’endomorphismes

2.1 Endomorphisme nilpotent et Matrice nilpotente

2.1.1 Nilpotence et indice de nilpotence

Définition 2.1.1 1. *On dit qu’une matrice carrée A est nilpotente s’il existe un entier naturel p tel que A^p soit la matrice nulle. L’indice de nilpotence est alors le plus petit p tel que $A^p = 0$.*

2. *Les notions de matrice nilpotente et d’endomorphisme nilpotent sont très liées : Soient E un espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme et A sa matrice dans une certaine base.“La matrice A est nilpotente si et seulement si l’endomorphisme est nilpotent, c’est-à-dire qu’il existe p tel que $u^p = 0$, ou u^p désigne $u \circ ... \circ u$ et 0 l’endomorphisme nul”.*

Exemple 2.1.1 1. *On prend la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

D’où A est nilpotente d’indice de nilpotence $p = 2$.

2. *Considérons un espace vectoriel réel de dimension 3 avec pour base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Considérons alors un endomorphisme u défini par sa représentation matricielle suivante dans la base $\mathcal{B}$:*

$$u : \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Si nous calculons la représentation matricielle de u^2 et de u^3, on trouve :

$$u^2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad u^3 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque u^3 est l’endomorphisme nul u est bien nilpotent d’indice 3. Son indice est plus petit que la dimension de l’espace. Dans le cas général, l’indice d’un endomorphisme nilpotent est toujours inférieur ou égal à la dimension de l’espace.

2.1.2 Nilpotence et base réduite

Considérons alors le vecteur e_1. Il est d'indice 2 et la famille $(e_1, u(e_1), u^2(e_1))$ est libre. Elle est libre et de cardinal égal à la dimension de l'espace vectoriel. Cette famille est donc une base. Dans cette base, la représentation matricielle de u prend alors la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Là encore, ces propriétés sont génériques pour un endomorphisme nilpotent. Dans le cas général de dimension n, si x est un vecteur d'indice p alors p est inférieur ou égal à n et la famille $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est une famille libre. De plus, il existe toujours une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$, tel que $u(e_i)$ soit égal, soit à 0 soit à e_{i+1}, avec $u(e_n) = 0$. C'est la base réduite pour l'endomorphisme nilpotent.

2.2 Exponentiel d'une matrice

La fonction exponentielle est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, alors au voisinage de 0, alors d'après le développement de Taylor on peut écrire

$$e^t = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \lim_{p \to +\infty} \sum_{n=1}^{p} \frac{t^n}{n!}.$$

Définition 2.2.1 *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *On appelle* **exponentielle** *de la matrice A, notée par $\exp(A)$, la formule suivante :*

$$\exp(A) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Nous avons les propriétés suivantes :

2. *Si $AB = BA$ alors* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$.
3. *Si A est une matrice carrée quelconque, alors* $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$.
4. *Si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors* $\exp(A^{-1}) = e(\exp(A))^{-1} = \exp(I_n - A)$.

Exemple 2.2.1 1. *On prend la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors on a $A^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors*

$$\exp(A) = \mathrm{I} + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. *Pour la matrice B suivante*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \textit{on a} \;\; B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on a

$$\exp(B) = \mathrm{I} + B + \frac{1}{2}B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -9 \\ 3 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -9 \\ 5 & 10 & -9 \\ 3 & 12 & -11 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.1 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

1. *Si A est nilpotente d'indice de nilpotence p, alors*

$$\exp(A) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{A^n}{n!}.$$

2. *Si la seule valeur propre de A est 0, alors les puissance de A sont nulles à partir d'un certain rang n_0 :*

$$A^n = 0, \quad \textit{dès que} \quad n \geq n_0.$$

Dans ce cas, on a

$$\exp(A) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{n_0} \frac{A^n}{n!}.$$

3. *Si A a une seule valeur propre λ, alors nous pouvons écrire $A = \lambda I + B$ où B est une matrice dont la seule valeur propre est 0. On a bien*

$$\exp(A) = \exp(\lambda).\exp(B)$$

4. *Si A est une matrice diagonale, c'est-à-dire que A s'écrit sous la forme*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \textit{alors} \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

5. *Soit A une matrice diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P de vecteurs propres telle que*

$$A = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \;\; \textit{et} \;\; \exp(A) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Démonstration. Exercice. □

2.3 Système d'équations différentielles

Soit X une matrice colonne des fonctions, A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et D un vecteur colonne. On suppose que les coefficients de A et D sont donnés.
On appelle un système différentiel linéaire à coefficients constants et d'inconnu X, l'équation linéaire que satisfait X au sens usuel des équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + D(t), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{0.1}$$

où n est le nombre de fonctions à déterminer en résolvant le système différentiel (0.1).

2.3.1 Système homogènes

Le système différentiel homogène associé à l'équation (0.1) est

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) \tag{0.2}$$

La solution générale de l'équation (0.2) est définie par

$$X(t) = \exp(tA)X(0),$$

où, par définition :

$$\exp(tA) = \mathrm{I} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Par calcul, la matrice $\exp(tA)$ se simplifie en utilisant les propriétés de l'exponentielle d'une matrice.
L'ensemble des solutions du système différentiel homogène (0.2) est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n. C'est un sous-espace de l'espace des fonctions à valeurs complexes.

Proposition 2.3.1 *Soit A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de la matrice A et $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les vecteurs associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, alors la solution générale de l'équation homogène (0.2) s'écrit sous la forme :*

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(\lambda_i t) V_i,$$

où $\alpha_i \in \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq n)$ sont des scalaires.

Exemple 2.3.1 *On considère le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$

on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *alors*

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X(t)$$

alors

$$X(t) = \exp(tA)X(0),$$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ *est donné.*
La matrice A *a deux valeurs propres distinctes* -1 *et* 3*, alors*

$$X(t) = \alpha_1 \exp(-t)V_1 + \alpha_2 \exp(3t)V_2,$$

où $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est le vecteur propre associé à* -1 *et* $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est le vecteur propre associé à* 3*.*

$$\begin{cases} x(t) = \alpha_1 \exp(-t) + \alpha_2 \exp(3t), \\ y(t) = \alpha_1 \exp(-t) + \alpha_2 \exp(3t) \end{cases}$$

2.3.2 Systèmes avec seconds membres

On reprend le système différentiel avec second membre donné par (0.1)

Proposition 2.3.2 *La solution générale du système (0.1) est la somme d'une solution particulière de (0.1) et de la solution générale du système différentiel homogène (0.2).*

Proposition 2.3.3 *Si le second membre* D *est défini par :*

$$D(t) = \exp(\omega t)D_0,$$

où D_0 *est un vecteur à coefficients constants dans* $\mathbb{K}$*, alors il existe une solution particulière* $X(t)$ *de la forme :*

1. $X(t) = \exp(\omega t)X_0$*, si* ω *n'est pas une valeur propre de* A *;*
2. $X(t) = \exp(\omega t)(X_0 + tX_1)$*, si* ω *est une valeur propre simple de* A *;*
3. $X(t) = \exp(\omega t)(X_0 + tX_1 + t^2X_2)$*, si* ω *est une valeur propre double de* A *;*
4. $X(t) = \exp(\omega t)\displaystyle\sum_{i=0}^{n} t^i X_i$*, si* ω *est une valeur propre, de multiplicité* n*, de* A *;*

Remarque 2.3.1 *Si on ne connaît pas à priori la forme de la solution particulière, on fera le changement d'inconnues :*

$$X(t) = PY(t),$$

la matrice P *étant choisie de manière que la matrice* $P^{-1}AP$ *du système transformé :*

$$\frac{dY(t)}{dt} = P^{-1}APY(t) + P^{-1}D(t)$$

soit triangulaire ou, mieux encore, de la forme de Jordan. Cette partie sera bien aborder les années ultérieures avec plus de bagages d'algèbre et d'analyse.

2.4 Exercices

Exercice 2.4.1 *Soit $(\mathcal{S})$ le système différentiel linéaire sans second membre*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= x(t) - \frac{1}{2}\, y(t) \\ y'(t) &= 2\, x(t) - y(t) \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. *Écrire $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible ?*
2. *Calculer B^2 et B^3. Que peut-on déduire ?*
3. *Calculer la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t.*
4. *En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ lorsque $x(0) = 1$ et $y(0) = -1$.*

Exercice 2.4.2 *Soit $(\mathcal{S})$ le système différentiel linéaire sans second membre*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2\, y(t) + z(t) \\ y'(t) &= 2\, y(t) + 3z(t) \\ z'(t) &= 3z(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. *Écrire $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle $X'(t) = BX(t)$ où B est une matrice à déterminer. La matrice B est-elle inversible ? Qu'appelle-t-on ce type de matrice ?*
2. *Montrer que la matrice B s'écrit sous la forme $D + N$ où D est une matrice diagonale à déterminer et N est une matrice nilpotente à déterminer.*
   **Déterminer l'indice de nilpotence de N.*
3. *En utilisant l'écriture $B = D + N$, montrer que $\exp(tB) = \exp(tD)\left(I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ où I_3 est la matrice identité de taille (3×3).*
4. *Calculer les matrices $P = \exp(tD)$ et $Q = I_3 + tN + \frac{1}{2}t^2N^2$.*
5. *En déduire l'expression de la matrice $A = \exp(tB)$ en fonction de t.*
6. *En déduire les expressions des fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $x(0) = k_1$, $y(0) = k_2$ et $z(0) = k_3$.*
   **Déterminer les fonctions $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ lorsque $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ et $k_3 = 2$.*

Exercice 2.4.3 *On veut résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :*

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. *Montrer qu'on peut écrire le système différentiel sous la forme :*

$$X' = A.X$$

où A est une matrice à déterminer.

2. *Montrer que le système est bien défini, puis trouver le polynôme caractéristique associé à A.*
3. *Trouver les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A.*
4. *Trouver les vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.*
5. *Trouver la solution générale $X(t)$, puis touver la solution $X(t)$ satisfaisant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$.*
6. *Trouver la solution $t \longmapsto X(t)$ tel que $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{j} \\ \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$ où $j = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.*

Pui, montrer que si M, N et P sont dans le plan complexe les images de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, le traingle MNP est équilatéral.

Exercice 2.4.4 *Soit ($\mathcal{S}$) le systeme differentiel lineaire avec second membre*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) + e^t \\ y'(t) &= -3x(t) - 3y(t) + z(t) - e^t \\ z'(t) &= 2x(t) + 2y(t) - z(t) + 2e^t \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. *Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du systeme linéaire homogène associé à ($\mathcal{S}$).*
2. *Déterminer la solution particulière du système ($\mathcal{S}$) pour les conditions initiales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ et $z(0) = 1$.*
3. *Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du système ($\mathcal{S}$).*

Exercice 2.4.5 *Soit ($\mathcal{S}$) le systeme differentiel lineaire avec second membre*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x'(t) &= y(t) - z(t) \\ y'(t) &= -x(t) + z(t) \\ z'(t) &= x(t) - y(t) \end{cases}$$

où x, y et z sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $t \in \mathbb{R} \longmapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. *Ecrire le système différentiel linéaire ($\mathcal{S}$) sous la forme $X'(t) = A.X(t)$ où A est une matrice à déterminer.*
2. *Déterminer la solution générale, à valeurs réelles, du systeme linéaire ($\mathcal{S}$).*
3. *Calculer la norme $\|X(t)\|$. Que peut-en déduire ?*
4. *Montrer que toutes les solutions du système ($\mathcal{S}$) sont planes. Conclure.*

Exercice 2.4.6 *Soit a un paramètre réel. On considère les trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sous la forme récurrente par $u_0 = 1$, $v_0 = 1$, $w_0 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par le système suivant*

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} &=& 3u_n - w_n \\ v_{n+1} &=& 2u_n + v_n + (1+a^2)w_n \\ w_{n+1} &=& -u_n + v_n + w_n \end{array} \right.$$

1. *Déterminer la matrice A telle qu'on peut écrire le système $(\mathcal{S})$ sous la forme matricielle*

$$X_{n+1} = AX_n \quad \textit{avec} \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

   **Montrer par récurrence que $X_n = A^n X_0, \quad \forall n \geq 0$.*

2. *Déterminer le polynôme caractéristique de A puis calculer ses valeurs propres.*

3. *Déterminer les vecteurs propres et les sous-espaces propres de A.*
   **Trouver les réels a pour que la matrice A soit diagonalisable, en déduire le polynôme minimal.*
   **Dans ce cas, proposer une base de vecteurs propres de A puis diagonaliser A.*

4. *Dans la suite de cet exercice, on se limite au cas "$a = 0$"*
   - (a) *Montrer que A n'est pas diagonalisable.*
   - (b) *Déterminer P une matrice de passage telle que $J = P^{-1}AP$ soit une matrice de Jordan.*
     **Donner les cas possibles de la matrice de Jordan J.*
   - (c) *Calculer P^{-1}, puis calculer A^n pour tout $n \geq 1$.*
   - (d) *En déduire les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.*

Exercice 2.4.7 *I. On propose de résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :*

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + z(t) \end{array} \right.$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ la dérivée de $X(t)$ par rapport à t.

- (a) *Déterminer la matrice A telle qu'on peut écrire le système différentiel $(\mathcal{S})$ sous la forme :*

$$X'(t) = AX(t).$$

- (b) *Montrer que le système est bien défini, puis trouver le polynôme caractéristique associé à A.*
- (c) *Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de la matrice A, puis déterminer les vecteurs propres v_1, v_2 et v_3 associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.*
- (d) *Déterminer les sous-espaces propres $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ associés respectivement aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.*
  **Donner une interprétation géométrique des sous-espaces propres $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$.*
- (e) *Écrire l'expression générale d'une solution $X(t)$ du système $(\mathcal{S})$, puis trouver la solution $t \longmapsto X(t)$ telle que $x(0) = 1$, $y(0) = 1/2$ et $z(0) = 3$.*

II. *En utilisant la partie* I)*, résoudre le système avec second membre suivant :*

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) - e^{2t} \\ y'(t) = -x(t) + 2y(t) + z(t) + e^{2t} \\ z'(t) = x(t) + z(t) + e^{2t} \end{cases}$$

avec $x(0) = 1$*,* $y(0) = 0$ *et* $z(0) = 0$*. (*Indication : trouver d'abord une solution particulière).

Exercice 2.4.8 *Soient* (e_1, e_2, e_3) *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *défini par*

$$f(e_1) = 2e_1 + e_2 + e_3, \quad f(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + 2e_3.$$

1. *Déterminer la matrice* A *associée à* f *relativement à la base* (e_1, e_2, e_3)*.* A *est-elle inversible ?*
2. *Déterminer Ker*(f) *et Im*(f)*. Quel est le rang de* f *?* **Justifier**
3. *Déterminer l'ensemble* $\mathcal{D}$ *des points fixes de* f*.*
4. *Déterminer le polynôme caractéristique de* f*, puis calculer ses valeurs propres. Donner l'ordre de multiplicité de ces valeurs propres.*
5. *Calculer les vecteurs propres de* A*, puis montrer qu'un des sous espaces propres de* A *est l'ensemble des points fixes de* f*.*
6. *Montrer que* A *est diagonalisable, puis trouver la matrice de passage* P *telle que* $P^{-1}AP$ *soit diagonale.*
7. *Calculer* P^{-1}*, puis calculer* A^n *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*.*
8. *On considère les trois suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies sous la forme récurrente par* $u_0 = 1$*,* $v_0 = 1$*,* $w_0 = -1$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par le système suivant*

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

   (a) *Écrire le système* $(\mathcal{S})$ *sous forme matricielle.*
   (b) *Déduire les expressions des suites réelles* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en fonction de* n*.*

Exercice 2.4.9 *On propose de résoudre le système différentiel linéaire du premier ordre sans second membre suivant :*

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x'(t) = x(t) - y(t) + 2z(t) + u(t) \\ y'(t) = 4y(t) + z(t) - 2u(t) \\ z'(t) = y(t) + 2z(t) - u(t) \\ u'(t) = 2y(t) + z(t) \end{cases}$$

On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$ *et* $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$ *la dérivée de* $X(t)$ *par rapport à* t*.*

1. *Déterminer la matrice* A *telle qu'on peut écrire le système différentiel* $(\mathcal{S})$ *sous la forme :*

$$X'(t) = AX(t).$$

2. *Déterminer le polynôme caractéristique associé à* A*, puis ses valeurs propres. La matrice* A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{R}$ *?* A *est-elle diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *?*
3. *Déterminer les vecteurs propres de* A *et les sous-espaces propres.*
4. *Déterminer une base de vecteurs propres de* A*, puis diagonaliser* A*.*
5. *Écrire l'expression générale d'une solution* $X(t)$ *du système* $(\mathcal{S})$*, puis trouver la solution* $t \longmapsto X(t)$ *telle que* $x(0) = 1$*,* $y(0) = -1$*,* $z(0) = 1$ *et* $u(0) = -1$*.*

Chapitre 3

Formes bilinéaires, Formes quadratiques et Espaces Euclidien

Dans ce chapitre on note par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Formes linéaires

3.1.1 Définistions et Notations

Définition 3.1.1 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.*
On appelle **forme linéaire** *sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire toute application f de E dans $\mathbb{K}$ satisfaisant les conditions de linéarité*

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x, y) \in E^2.$$

L'espace vectoriel des formes linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est noté par $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

Définition 3.1.2 *Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.. On appelle* **dual algébrique** *de E, noté E^*, l'ensemble des formes linéaire sur E. C'est-a-dire $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.*

***Structure d'espace vectoriel sur** E^* : $(E^*, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit f et g deux éléments de E^* et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $f + g$ et λf sont des éléments de E^* et sont définies par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda . f(x), \quad \forall x \in E.$$

***Notation** : pour $f \in E^*$ et $x \in E$, on note $f(x)$ par

$$< f, x >= f(x).$$

Dans ce cas, on a

1. $< f, x + y >=< f, x > + < f, y >$,
2. $< f, \lambda x >= \lambda < f, x >$,
3. $< f + g, x >=< f, x > + < g, x >$,
4. $< \lambda f, x >= \lambda < f, x >$.

***Dans la pratique** : Montrer que deux éléments f et g de E^* sont égaux, revient à montrer que

$$< f, x >=< g, x >, \quad \forall x \in E.$$

3.1.2 Théorèmes de caractérisation

Fixons une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Nous allons alors construire explicitement toutes les formes linéaires sur E.
donnons-nous n scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, et posons pour tout vecteur x de E, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$:

$$f(x) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Il est immédiat que f est une forme linéaire sur E. Notons que $f(e_i) = \alpha_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n$.
Ainsi, à tout élément $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $\mathbb{K}^n$, nous savons associer un élément f de E^*. Nous allons voir que toute forme linéaire sur E peut s'obtenir par le procédé précédent. Plus précisement :

Théorème 3.1.1 *L'application $\Phi : \mathbb{K}^n \to E^*$ définie précédement est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ sur l'espace vectoriel E^*.*

Démonstration. □

Corollaire 3.1.1 *Si E est de dimension n alors E^* est dimension n aussi.*

Le symbole de Kronecker : on appelle le symbole de Kronecker l'application définie par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Théorème 3.1.2 *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe des vecteurs $f_1, \ldots, f_n$ uniques de E^*tels que*

$$< f_i, e_j >= \delta_{ij}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Le système $(f_1, \ldots, f_n)$ forme une base de l'espace dual E^*.

Démonstration.

1. **Existence de la base** $(f_1, \ldots, f_n)$: reprenons l'isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E^* que nous avons étudié précédement. Cet isomorphisme transforme la base canonique de $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ en une base $(f_1, \ldots, f_n)$ de E^*. Comme x_1 est l'élément $(1, 0, \ldots, 0)$ de $\mathbb{K}^n$, l'élément correspondant f_1 de E^* est tel que
$$f_1(e_1) = 1, f_1(e_2) = 0 \ldots, f_1(e_n) = 0$$
on voit de même que $f_i(e_j) = \delta_{ij}$
2. **Unicité des vecteurs** $f_1, \ldots, f_n$: Pour i fixé. Les formules
$$< f_i, e_1 >= \delta_{i1}, \ldots, < f_i, e_n >= \delta_{in}$$
définissent f_i de manière unique.

□

D'après le théorème que nous vennons d'établir, la base $(f_1, \ldots, f_n)$ s'appelle **la base duale** de la base donnée $(e_1, \ldots, e_n)$. On l'a note par $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ et on donne les formules

$$< e_i^*, e_j >= \delta_{ij}, \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

de par cette formule, on déduit

$$< \mu_1 e_1^* + \ldots + \mu_n e_n^*, \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n >= \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \lambda_n \mu_n,$$

quels que soient les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n$.

3.2 Formes bilinéaires

3.2.1 Définitions et notations

Définition 3.2.1 *Soient E, F, et G des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Une application f de $E \times F$ dans G est dite* **bilinéaire** *si les conditions suiavntes sont satisfaites :*

i) $f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$,

ii) $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$,

iii) $f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$,

iv) $f(x, \mu y) = \mu f(x, y)$.

quels que soient x, x_1, x_2 dans E, y, y_1, y_2 dans F, et λ, μ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 3.2.1 *Soit E l'espace vectoriel des vecteurs libres de l'espace ordinaire. L'application $\Phi : E \times E \longrightarrow E$ définie par $\Phi(\vec{V}, \vec{V'}) = \vec{V} \wedge \vec{V'}$ est une application bilinéaire.*

3.2.2 Propriétés

1. Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ des vecteurs de E et $(y_1, \ldots, y_m)$ des vecteurs de F et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ des scalaires et f une forme bilinéaire sur $E \times F$ alors

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i \mu_j f\left(x_i, y_j\right).$$

2. Dans le cas où $E = F$, on dit que f est une application bilinéaire sur E.

3.2.3 Formes bilinéaires

Définition 3.2.2 *Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On appelle* **forme bilinéaire** *sur $E \times F$ toute application bilinéaire de $E \times F$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque $E = F$ on dit tout simplement une forme bilinéaire sur E.*

Exemple 3.2.2 *1. Soit e l'espace vectoriel des vecteurs libres de l'espace ordinaire. L'application $\Phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(\vec{V}, \vec{V'}) = \vec{V} \cdot \vec{V'}$ est une application bilinéaire.*

2. L'application

$$((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)) \longmapsto \lambda_1 \mu_1 + \ldots + \lambda_n \mu_n$$

de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}^n$, dite **canonique**.

3. Soit e un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'application $(f, x) \longmapsto < f, x >$ de $E^* \times E$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire sur $E^* \times E$ dite **canonique**.

3.2.4 Toutes les formes bilinéaires sur E

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Nous allons construire explicitement toutes les formes bilinéaires sur E. Donnons-nous n^2 scalaires α_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$. Quels que soient $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ deux vecteurs de E, posons

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i y_j$$

Il est immédiat que f est une forme bilinéaire sur E. Notons que $f(e_i, e_j) = \alpha_{ij}$. Ainsi, à tout élément (α_{ij}) de $\mathbb{K}^{n^2}$, nous avons associer une forme bilinéaire f.
On note par $\mathcal{B}(E, \mathbb{K}) = \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E.

Exercice 3.2.1 *Montrer que* $(\mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E), +, \times)$ *est un espace vectoriel.*

Théorème 3.2.1 *L'application* $\Phi : \mathbb{K}^{n^2} \longmapsto \mathcal{B}_{\mathbb{K}}(E)$ *définie par* $\Phi((\alpha_{ij})) = f$ *est bijective.*

Démonstration. Injectivité : Si les systèmes de scalaires (α_{ij}) et (α'_{ij}) définissent la même forme bilinéaire f, on a

$$\alpha_{ij} = f(e_i, e_j) = \alpha'_{ij}$$

quels que soient $1 \leq i, j \leq n$, donc $(\alpha_{ij}) = (\alpha'_{ij})$; ainsi l'application est injective.
Surjectivité : soit f une forme bilinéaire sur E. Posons $f(e_i, e_j) = \alpha_{ij}$. Soit g la forme bilinéaire correspondant à (α_{ij}). Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ on a

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \alpha_{ij} \\ &= g(x, y). \end{aligned}$$

Donc $f \equiv g$, ce qui achève la démonstration. □

3.2.5 Formes bilinéaires symétriques

Définition 3.2.3 *Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une forme bilinéaire sur $E \times F$ est* **symétrique** *si*

$$f(x, y) = f(y, x), \quad \forall (x, y) \in E \times F.$$

Homomorphismes définis canoniquement par une forme bilinéaire : Soit f une forme bilinéaire sur $E \times F$. Nous allons définir une application u de E dans F^*.
Fixons provisoirement x dans E. Alors l'application $y \mapsto f(x, y)$ de F dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire sur F, c'est-à-dire un élément de F^*, que nous noterons $u(x)$. On a donc par définition

$$f(x, y) =< u(x), y >, \quad \text{pour } x \text{ dans } E \text{ et } y \text{ dans } F.$$

Montrons que u est un homomorphisme de E dans F^* : soient x_1 et x_2 dans E, $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{array}{rcl} < u(x_1+x_2), y > & = & f(x_1+x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ & = & < u(x_1), y > + < u(x_2), y > \\ & = & < u(x_1) + u(x_2), y > \\ < u(\lambda x_1), y > & = & f(\lambda x_1, y) = \lambda f(x_1, y) \\ & = & \lambda < u(x_1), y > = < \lambda u(x_1), y > \end{array}$$

d'où

$$u(x_1+x_2) = u(x_1) + u(x_2) \quad \text{et} \quad u(\lambda x_1) = \lambda u(x_1)$$

Définition 3.2.4 *On dit que u est l'homomorphisme de E dans F^* défini canoniquement par f.*

En échangeant les rôles de E et F dans ce qui précède, on obtient l'**homomorphisme** de F dans E^* défini **canoniquement** par f. Il s'agit de l'application v telle que

$$f(x, y) = < v(y), x >, \quad \text{pour } x \text{ dans } E \text{ et } y \text{ dans } F.$$

On peut vérifier facilement que v est un homomorphisme d'espace vectoriel de F dans E^*.

Théorème 3.2.2 *Une forme bilinéaire symétrique f sur l'espace vectoriel $E \times F$ définit un homomorphisme u de E dans le dual F^* et un homomorphisme v de F dans le dual E^* donnée par*

$$f(x, y) = < u(x), y > = < v(y), x >, \quad \forall (x, y) \in E \times F.$$

Le **rang** *de f est le rang de u et Ker(f) = Ker(u).*

$$\mathit{Ker}(f) = \mathit{Ker}(u) = \{x \in E \,/\, f(x, y) = < u(x), y > = 0, \quad \forall y \in F\}$$

3.2.6 Formes bilinéaires non-dégénérées

Définition 3.2.5 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit f une forme bilinéaire sur $E \times F$.*
On dit que f est **dégénérée** *s'il existe un x_0 non nul dans E tel que $f(x_0, y) = 0$ pour tout $y \in F$., ou s'il existe un y_0 non nul dans F tel que $f(x, y_0) = 0$ pour tout x dans E.*

Exemple 3.2.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'application $(x, y) \longmapsto 0$ de $E \times F$ dans $\mathbb{K}$ est une forme bilinéaire dégénérée (sauf si $E = F = \{0\}$).*

Définition 3.2.6 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une forme bilinéaire f sur E est dite* **non dégénérée** *si son noyau est réduit à $\{0\}$ ou si rang(f) = dim$(E) = n$.*

Exemple 3.2.4 *Soit f la forme bilinéaire canonique sur $\mathbb{K}^n$. Alors f est non dégénérée. En effet, soit $x0 = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément non nul de v. Il existe un indice i tel que $x_i \neq 0$. soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a*

$$f(x_0, e_i) = f(e_i, x_0) = x_i \neq 0$$

Théorème 3.2.3 *Soit f une forme bilinéaire sur $E \times F$. Soient $u : E \to F^*$ et $v : F \to E^*$ les homomorphismes définis canoniquement par f. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *f est non dégénérée.*

ii) *u et v sont injectifs*

Démonstration.$i) \Rightarrow ii)$. Supposons que f non dégénérée. Soit x un élément non nul de E. Il existe y dans F tel que $f(x,y) \neq 0$, c'est-à-dire $< u(x), y > \neq 0$.De la même façon, on montre que v est injectif.
$ii) \Rightarrow i)$. Supposons que u et v injectifs. Soit x un élément non nul de E. On a $u(x) \neq 0$, donc il existe y dans F tel que $< u(x), y > \neq 0$, c'est-à-dire $f(x,y) \neq 0$, on voit de même que, si y' est un élément de F, il existe un x' dans E tel que $f(x',y') \neq 0$. □

Théorème 3.2.4 *Soit f une forme bilinéaire sur $E \times F$. Soient $u : E \to F^*$ et $v : F \to E^*$ les homomorphismes définis canoniquement par f. On suppose que f non dégénérée et E est de dimension finie.*

i) *F est dimension finie et dim$(E) =$ dim(F).*

ii) *u et v sont des isomorphismes.*

Démonstration. Puisque v est injectif, alors F est isomorphe à $v(F)$; comme E^* est de dimension finie, F est de dimension finie et

$$\dim(F) = \dim v(F) \leq \dim(E^*) = \dim(E)$$

Puisque F est de dimension finie, on peut échanger le rôle de E et F dans ce qui précède, donc

$$\dim(E) \leq \dim(F)$$

et finalement $\dim(E) = \dim(F)$.
Mais alors $\dim(E^*) \leq \dim v(F)$, d'où $v(F) = E^*$, de sorte que v est un isomorphisme de F sur E^*. De même, on voit que u est un isomorphisme de E sur F^*. □

Remarque 3.2.1 *Dans les conditions du théorème précédent, on identifie souvent E à F^* par u, et F à E^* par v. On considère alors chacun des deux espaces vectoriels E, F comme le dual de l'autre, et l'on a, pour $x \in E$ et $y \in F$*

$$f(x,y) =< x, y >=< y, x > .$$

Exemple 3.2.5 *Soit E l'espace vectoriel des vecteurs libres de l'espace ordinaire. Pour tout vecteur $\vec{V}$ dans E, soit $f_{\vec{V}}$ la forme linéaire $\vec{V'} \longmapsto \vec{V} \cdot \vec{V'}$ sur e. L'application $\vec{V} \mapsto f_{\vec{V}}$ est un isomorphisme de E sur E^* par lequel on identifie souvent E à son dual. On a alors*

$$< \vec{V}, \vec{V'} >=< \vec{V'}, \vec{V} >= \vec{V} \cdot \vec{V'}$$

3.2.7 Matrice d'une forme bilinéaire

Définition 3.2.7 *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E, et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ une forme bilinéaire sur E. On appelle* **matrice** *de f par rapport à la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, la matrice $M = (\alpha_{i,j})$ de type $n \times n$ définie par*

$$\alpha_{i,j} = f(e_i, e_j), \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Théorème 3.2.5 *l'application $\Phi : \mathcal{B}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{K}^{(n\times n)}$, $f \longmapsto \Phi(f) = (\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est bijective.*

Théorème 3.2.6 *Soit $M = (\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f par rapport à une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E et $M' = (\alpha'_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de f par rapport à une base $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ de E. alors*

$$M' = P^T M P$$

où P est la matrice de passage de $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(e'_i)_{1\leq i\leq n}$.

Démonstration. posons $P = (\lambda_{i,j})$; on a $e'_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,i} e_k$, donc

$$\alpha'_{i,j} = f(e'_i, e'_j) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,i} e_k, \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_{\ell,j} e_\ell\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \lambda_{k,i}\lambda_{\ell,j} f(e_k, e_\ell) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \lambda_{k,i}\lambda_{\ell,j}\alpha_{k,\ell}$$

Or posons $P^T = (\mu_{i,j})$ de sorte que $\mu_{i,j} = \lambda_{j,i}$. L'élément de $P^T M P$ situé dans la i^{ime} ligne et la j^{ime} colonne est

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{i,k} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{k,\ell}\lambda_{\ell,j}\right) = \sum_{k,\ell=1}^{n} \lambda_{k,i}\lambda_{\ell,j}\alpha_{k,\ell} = \alpha'_{i,j}$$

d'où l'égalité. □

Proposition 3.2.1 *Une forme bilinéaire f sur $\mathbb{R}^n$ donnée par $f(x, y) = x^T M y$ est symétrique (c'est-à-dire $f(x, y) = f(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$) si et seulement si M est une matrice symétrique.*

Démonstration. On a $< y, Mx >= (Mx)^T y = x^T M^T y =< M^T y, x >$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} M \quad \text{est symétrique} \quad &\Leftrightarrow \quad M = M^T \\ &\Leftrightarrow \quad < My, x >=< y, Mx >=< Mx, y >, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \\ &\Leftrightarrow \quad f(x, y) = f(y, x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

□

3.3 Formes multilinéaires

Définition 3.3.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle forme p-linéaire sur E une application de E^p dans $\mathbb{K}$*

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_p),$$

linéaire par rapport à chaque variable.
Quand on ne veut pas préciser l'entier p, on dit tout simplement que f est une forme multilinéaire.

Exemple 3.3.1 *Soit par exemple f une forme trilinéaire sur E. On a*

$$f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j, \sum_{k=1}^{p} \nu_k z_k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \lambda_i \mu_j \nu_k f(x_i, y_j, z_k)$$

quels que soient les vecteurs x_i, y_j et z_k dans E et les scalaires λ_i, μ_j et ν_k.
En particulier, soit $(e_1, e_2, \dots, e_q)$ une base de E. Alors la forme trilinéaire f est parfaitement déterminée par la connaissance des nombres $f(e_i, e_j, e_k) = \alpha_{ijk}$; en effet,

$$f(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j e_j, \sum_{k=1}^{q} \nu_k e_k) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{q} \lambda_i \mu_j \nu_k \alpha_{ijk}$$

Réciproquement, *quels que soient les scalaires α_{ijk}, cette formule définit une forme trilinéaire sur E . On sait donc construire toutes les formes trilinéaires sur E.*

Remarque 3.3.1 *De façon analogue, on utilisera le même procédé pour les formes p-linéaires ; sauf qu'elles sont plus compliquées é écrire car il est nécessaire d'introduire des indices doubles.*

Chapitre 4

Formes quadratiques et Espaces Euclidien

4.1 Formes quadratiques

4.1.1 Définitions et forme polaire

Définition 4.1.1
1. *Une forme quadratique sur* $\mathbb{R}^n$ *est une application* $\mathbf{q} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *de la forme* $\mathbf{q}(x) = f(x, x)$ *où* f *est une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathbb{R}^n$.
2. *Une forme quadratique sur un* $\mathbb{R}$*-e.v.* E *est une application* $\mathbf{q} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *de la forme* $\mathbf{q}(x) = f(x, x)$ *où* f *est une forme bilinéaire symétrique sur* E.

Proposition 4.1.1 *une forme quadratique est une application* $\mathbf{q} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *qui peut s'écrire sous la forme* $\mathbf{q}(x) =< Mx, x >= x^T Mx$ *avec* M *est une matrice symétrique.*

Remarque 4.1.1 *Une forme quadratique peut être donnée sous la forme*

$$\mathbf{q}(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \leq j} \alpha_{i,j} x_i x_j.$$

Montrons que l'on peut toujours l'écrire sous la forme

$$\mathbf{q}(x) = x^T Mx$$

avec M *est une matrice symétrique. En effet,* $j = 1, \ldots, n$, $i < j$ *posons* $\beta_{i,j} = \frac{\alpha_{i,j}}{2} = \beta_{j,i}$ *et* $\beta_{i,i} = \alpha_{i,i}$*. Il en résulte que*

$$\mathbf{q}(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_i x_j$$

car $\alpha_{i,j} x_i x_j = \beta_{i,j} x_i x_j + \beta_{j,i} x_j x_i$ *pour* $i < j$.

Exemple 4.1.1 *Considérons* $\mathbf{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbf{R}$ *donnée par*

$$\mathbf{q}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2^2 - x_3^3.$$

On peut donc écrire

$$\mathbf{q}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_3 + 2x_2^2 - x_2x_3 + x_3x_1 - x_3x_2 - x_3^3$$

On pose $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ *alors*

$$\mathbf{q}(x) = x^T M x = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Ici, la matrice M *associée à la forme quadratique* $\mathbf{q}$ *est donnée par*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.1.2 *Dans le cas d'un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* E*, toute forme quadratique* $\mathbf{q}$ *est associée à une unique forme bilinéaire symétrique* f*. En particulier,*

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{q}(x + y) - \mathbf{q}(x) - \mathbf{q}(y) \right), \quad \forall (x, y) \in E \times E.$$

♣ *La forme* f *est appelée la* **forme polaire** *de* $\mathbf{q}$.

4.1.2 Diagonalisation d'une forme quadratique

Théorème 4.1.1 *(Théorème des axes principaux)*
Soit $\mathbf{q}$ *la forme quadratique sur* $\mathbb{R}^n$ *donnée par* $\mathbf{q}(x) = x^T M x$ *où* M *est une matrice symétrique. Alors il existe une matrice orthogonale* $\mathbb{Q}$ *telle que, avec le changement de variables* $y = \mathbb{Q}^{-1}x$*, la forme quadratique devient*

$$\widetilde{\mathbf{q}}(y) = \mathbf{q}(\mathbb{Q}y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

où $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *sont les valeurs propres de* M.

Démonstration. Soit $\mathbf{q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. D'après la remarque précédente, $\mathbf{q}$ peut être donnée par

$$\mathbf{q}(x) =< Mx, x >= x^T M x$$

avec M est une matrice symétrique.
Or, toute matrice symétrique peut être orthogonalement diagonalisée, alors Il existe une matrice orthogonale $\mathbb{Q}$ et une matrice diagonale réelle $\mathbb{D}$ telle que

$$M = \mathbb{Q}\mathbb{D}\mathbb{Q}^T$$

ainsi
$$\mathbf{q}(x) =< \mathrm{QDQ}^T x, x >=< \mathrm{DQ}^T x, \mathrm{Q}^T x >= (\mathrm{Q}^T x)^T \mathrm{D}(\mathrm{Q}^T x) = y^T \mathrm{D} y$$
où $y = (y_1, \dots, y_n)^T = \mathrm{Q}^T x = \mathrm{Q}^{-1} x$ (car $\mathrm{Q}^T = \mathrm{Q}^{-1}$ puisque Q est orthogonale). d'où on obtient

$$\mathbf{q}(x) = y^T \mathrm{D} y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de la matrice M (qui sont toutes réelles puisque la matrice M est symétrique). $\square$

Exemple 4.1.2 *Considérons la forme quadratique définie par $\mathbf{q}(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2$ qui s'écrit comme $\mathbf{q}(x_1, x_2) = x^T M x$ où $x = (x_1, x_2)^T$ et M est la matrice symétrique*

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de M sont $\lambda_1 = 8$ et $\lambda_2 = -2$ avec $v_1 = (1, 1)^T$ et $v_2 = (-1, 1)^T$ comme vecteurs propres associés qui sont, conformément à la théorie, orthogonaux. On obtient donc les colonnes de la matrice Q en orthonormalisant (ici il suffit de normaliser) $\{v_2, v_1\}$, d'où

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Posons $y = (y_1, y_2)^T = \mathrm{Q}^T x$. Ainsi, en terme de y la forme quadratique devient $\widetilde{\mathrm{q}}(y_1, y_2) = -2y_1^2 + 8y_2^2$ ce qui s'obtient en faisant la substitution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathrm{Q} y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 \end{pmatrix}$$

dans $\mathbf{q}(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2$.

Théorème 4.1.2 *(Théorème d'inertie de Sylvester)*
Soit $\mathbf{q}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Il existe une base $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ telle que si $x = x_1 e'_1 + \dots + x_n e'_n$, alors on a
$$\mathbf{q}(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$
avec $(r \leq n)$.
♣ *Le couple $(p, r - p)$ s'appelle la* **signature** *de la forme quadratique $\mathbf{q}$.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice symétrique définissant $\mathbf{q}$. Supposons que $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont celles qui sont > 0 et que $\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r$ sont celles qui sont < 0, les autres $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n$ étant nulles.
D'après le théorème précédent, il existe une base $\{E_1, \dots, E_n\}$ telle que si $x = y_1 E_1 + \dots + y_n E_n$ on a

$$\mathbf{q}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2.$$

Pour $i = 1, \ldots, p$ posons $e'_i = \sqrt{\lambda_i} E_i$, pour $i = p+1, \ldots, r$ posons $e'_i = \sqrt{-\lambda_i} E_i$ et posons $e'_i = E_i$ pour $i = r+1, \ldots, n$. Alors $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une base orthogonale et si $x = x_1 e'_1 + \ldots + x_n e'_n$, on a

$$x = \frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}} E_1 + \ldots + \frac{x_p}{\sqrt{\lambda_p}} E_p + \frac{x_{p+1}}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}} E_{p+1} + \ldots + \frac{x_r}{\sqrt{-\lambda_r}} E_r$$

d'où

$$\mathbf{q}(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i^2 = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$$

car $y_i = \frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ si $1 \leq i \leq p$ et $y_i = \frac{x_i}{\sqrt{-\lambda_i}}$ si $p+1 \leq i \leq r$. □

4.1.3 Dualité, La base duale

Théorème 4.1.3 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, f une forme bilinéaire non dégénérée sur $E \times F$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.*

i) Pour $i = 1, \ldots, n$, il existe un élément e'_i de F et un seul tel que

$$f(e_i, e'_i) = 1 \quad \textit{et} \quad f(e_j, e'_i) = 0, \quad \textit{pour} \quad i \neq j$$

ii) $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base de F.

Notations : Identifiant F à E^*. On dit que $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ relativement à f. On note souvent $(e^*_1, \ldots, e^*_n)$ la base duale $(e'_1, \ldots, e'_n)$.
On dit tout simplement que $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e^*_1, \ldots, e^*_n)$ sont deux bases duales.

Théorème 4.1.4 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, f une forme bilinéaire non dégénérée sur $E \times F$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(e^*_1, \ldots, e^*_n)$ des bases duales de E et F.*

i) Si $x \in E$, les coordonnées de x par rapport à $(e_1, \ldots, e_n)$ sont

$$f(x, e^*_1), \ldots\ldots, f(x, e^*_n).$$

ii) Si $y \in F$, les coordonnées de y par rapport à $(e^*_1, \ldots, e^*_n)$ sont

$$f(e_1, y), \ldots\ldots, f(e_n, y).$$

Démonstration. Si $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$, on a $f(x, e^*_i) = x_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Cela prouve $i)$, et $ii)$ s'en déduit en échangeant les rôles de E et F. □

4.2 Orthogonalité

Définition 4.2.1 *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, x un élément de e, x' un élément de E^*. On dit que x et x' sont* **orthogonaux** *si*

$$< x, x' >= 0.$$

Soient M un sous-ensemble de E, M' un sous-ensemble de E^*. On dit que M et M' sont **orthogonaux** *si tout vecteur de M est orthogonal à tout vecteur de M'.*

Exemple 4.2.1 *1. Prenons $E = \mathbb{K}^n$, auquel cas E^* s'identifie à $\mathbb{K}^n$. Alors un élément $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de $\mathbb{K}^n$ et un élément $x' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n)$ de $\mathbb{K}^n$ sont orthogonaux si*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda'_i = 0$$

2. Soit E l'espace ordinaire muni d'une origine O. On identifie E à son dual grâce au produit scalaire. Alors deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ de E sont orthogonaux si $\vec{V} \cdot \vec{V'} = 0$, c'est-à-dire s'ils sont orthogonaus au sens géométrique usuel.

Théorème 4.2.1 *Soient $\tilde{M} \subset E$, $M' \subset E^*$ deux parties orthogonales. Alors toute combinaison linéaire des éléments de M est orthogonale à toute combinaison linéaire des éléments de M'.*

Démonstration. Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans m, $x'_1, \ldots, x'_p$ dans M' et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_p$ des scalaires. On a

$$< \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \lambda'_j x'_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_i \lambda'_j < x_i, x'_j >= 0$$

car $< x_i, x'_j >= 0$, quels que soient $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$. □

Corollaire 4.2.1 *Soit $M \subset E$. L'ensemble N des vecteurs de E^* orthogonaux à M est un sous-espace vectoriel de E^*.*

Démonstration. Si x' et y' sont des éléments de E^* orthogonaux à M et si λ est un scalaire, alors $x' + y'$ et $\lambda x'$ sont orthogonaux à M. Ce qui montre que N est un sous-espace vectoriel de E^*. □

Définition 4.2.2 *L'ensemble N s'appelle, par abus de langage, le sous-espace vectoriel de E^* orthogonal à M ; il se note $M^\perp$.*

Exemple 4.2.2 *Si E est un espace vectoriel alors $E^\perp = \{0\}$, et $\{0\}^\perp = E^*$ tout entier.*

Théorème 4.2.2 *Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Alors $F^\perp$ est de dimension $n - p$.*

Démonstration. Soient $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de F. Le système $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est libre dans E, alors d'après le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $e_{p+1}, \ldots, e_n$ de E tels que $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ soit une base de E. Soit $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale de e^*.
Pour qu'un vecteur $\mu_1 e_1^* + \ldots + \mu_n e_n^*$ de E^* soit orthogonal à F, il faut et il suffit qu'il soit orthogonal à $e_1, \ldots, e_p$, c'est-à-dire qu'on ait

$$< \mu_1 e_1^* + \ldots + \mu_n e_n^*, e_j >= 0, \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

or $< \mu_1 e_1^* + \ldots + \mu_n e_n^*, e_j >= \mu_j$. On voit donc que $F^\perp$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*$. Donc $F^\perp$ admet pour base $\{e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*\}$. □

Théorème 4.2.3 *1. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E. alors $(F^\perp)^\perp = F$.*

2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, F' un sous-espace vectoriel de E^*. alors $(F'^\perp)^\perp = F'$.

Démonstration.

1. Tout vecteur x de F est orthogonal à $F^\perp$, alors $x \in (F^\perp)^\perp$, d'où $F \subset (F^\perp)^\perp$.
   Posons $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$. Alors $\dim(F^\perp) = n - p$, donc $\dim((F^\perp)^\perp) = n - (n - p) = p$, donc $\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(F)$.
   On a F est un s-e.v. de $(F^\perp)^\perp$ de même dimension que $(F^\perp)^\perp$ alors $F = (F^\perp)^\perp$.
2. idem

□

Théorème 4.2.4 *On suppose ici que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une forme bilinéaire f, éventuellement dégénérée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *$F \cap F^\perp = \{0_E\}$*
2. *$F \oplus F^\perp = E$*
3. *la restriction $f\lfloor_F$ de f à F est non dégénérée.*

Théorème 4.2.5 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Soient $f_1, \ldots, f_p$ des formes linéaires sur E, F' le sous-espace vectoriel de E^*qu'elles engendrent. L'ensemble des x dans E qui vérifient les équations*

   $$f_1(x) = 0, \ldots, f_p(x) = 0$$

   est un sous-espace vectoriel F de E, et alors $F'^\perp = F$.
2. *Soient $g_1, \ldots, g_q$ des formes linéaires sur E, G l'ensemble des x dans E qui vérifient les équations*

   $$g_1(x) = 0, \ldots, g_q(x) = 0.$$

   Pour que $F = G$ il faut et il suffit que chaque g_i soit une combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_p$ et que chaque f_i soit une combinaison linéaire de $g_1, \ldots, g_q$.
3. *Si $f_1, \ldots, f_p$ sont linéairement indépendantes, alors on a $\dim(F) = n - p$.*

4.3 Transposition

Définition 4.3.1 *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et u un élément de $\mathcal{L}(E,F)$. On associe à u, de manière naturelle, une application linéaire de F^* dans e^*, qu'on notera "${}^tu$", et qu'on appellera* **la transposée** *de u. On a ${}^tu \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$.*

La **la transposée** de u, notée ${}^tu$, est une application de F^* dans E^*. A tout élément y' de F^*, associe un élément de E^*. Or, $y' \circ u$ est une application linéaire de e dans $\mathbb{K}$, c'est-à-dire un élément de E^* ; cet élément que nous noterons ${}^tu(y')$.
Pour tout $x \in E$, on a

$$[{}^tu(y')](x) = (y' \circ u)(x) = y'(u(x)).$$

Autrement dit, ${}^tu(y')$ est défini par la formule

$$<^t u(y'), x> = < y', tu(x) >, \quad x \in E, \quad y' \in F^*$$

Théorème 4.3.1 *Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et, u et v deux éléments de $\mathcal{L}(E,F)$, et λ est un scalaire de $\mathbb{K}$. alors*

1. *${}^tu : F^* \to E^*$ est linéaire.*
2. *${}^t(u+v) =^t u +^t v$ et ${}^t(\lambda u) = \lambda.{}^tu$*

Démonstration. A faire en exercice. □

Théorème 4.3.2 *Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.*

$${}^t(v \circ u) =^t u \circ^t v$$

Démonstration. Soit $z' \in G^*$ et $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} <^t (v \circ u)(z'), x > &= < z', v \circ u(x) > \\ &= < z', v(u(x)) > \\ &= <^t v(z'), u(x) > \\ &= <^t u \circ^t v(z'), x >, \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

alors ${}^t(v \circ u)(z') =^t u \circ^t v(z')$ pour tout $z' \in G^*$, ce qui prouve ${}^t(v \circ u) =^t u \circ^t v$. □

Théorème 4.3.3 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$*

1. *Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est bijective, alors ${}^tu$ est bijective, et et $v \in \mathcal{L}(F,G)$.*

$$({}^tu)^{-1} =^t (u^{-1})$$

2. *Si E et F sont de dimension finie, et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors on a ${}^t({}^tu) = u$.*
3. *Si E et F sont de dimension finie, et si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on a*

$$Ker({}^tu) = (u(E))^\perp, \quad Ker(u) = ({}^tu(F^*))^\perp$$

Corollaire 4.3.1 *Le rang de u est égal au rang ${}^tu$.*

Démonstration. Soient ρ le rang de u et ρ' celui de ${}^tu$. On a

$$\begin{aligned} \rho' &= \dim(F^*) - \dim(N') \\ &= \dim(F) - \dim(N') \\ &= \dim(F) - \dim((u(E))^\perp) \\ &= \dim(u(E)) \\ &= \rho \end{aligned}$$

□

4.4 Espaces Euclidiens

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel de dimension n sur le corps des réel $\mathbb{R}$ et

Définition 4.4.1 1. *Une forme bilinéaire symétrique φ sur E est dite* **positive** *si*

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) \geq 0.$$

2. *On désigne par φ une* **forme bilinéaire symétrique positive** *sur E :*

$$\forall x \in E, \quad \mathbf{q}(x) = \varphi(x, x) \geq 0$$

3. *Une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E est appelée un produit scalaire.*
4. *Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est appelé un* **espace euclidien***.*

Exemple 4.4.1 *Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique défini par :*

$$(x, y) \longmapsto y^T x = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

(où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$) est un espace euclidien. En effet, il s'agit d'une forme bilinéaire symétrique, et $x^T x = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ est strictement positif pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ non nul.

Un produit scalaire est non dégénéré, puisque défini positif. Par ailleurs, comme sa restriction à tout sous-espace est non dégénérée (puisque définie positive), on voit d'après les théorèmes précédents, que pour tout sous-espace F de E, on a $F \oplus F^{\perp} = E$.

Définition 4.4.2 *Soit E un espace euclidien (dont le produit scalaire est noté $(x, y) \mapsto x^T y$). Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est dite orthogonale, si $e_i.e_j = 0$, pour $i \neq j$.*
♣ *Elle est dite orthonormée, si de plus $e_i.e_i = 1$ pour tout i.*

Théorème 4.4.1 *(inégalité de Schwartz)*
Soit E un espace euclidien, le produit scalaire de x et y étant noté $x.y$ Pour tous x et y de E, on a :

$$(x.y)^2 \leq (x.x)(y.y)$$

Démonstration. Soit λ un réel. $(x + \lambda y).(x + \lambda y)$ est positif ou nul, puisque c'est un carré scalaire. Cette expression est en fait le trinôme du second degré en λ :

$$(x.x) + 2\lambda(x.y) + \lambda^2(y.y)$$

Comme elle reste positive pour tout λ, son discriminant doit être négatif ou nul, ce qui donne l'inégalité cherchée.

$$\Delta = 4(x.y)^2 - 4(x.x)(y.y) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (x.y)^2 \leq (x.x)(y.y)$$

□

Théorème 4.4.2 *Tout espace euclidien E de dimension finie possède une base orthonormée.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur la dimension n de E. Si E est de dimension 0, c'est clair (il y a une seule base, qui est vide, donc orthonormée). Si E est de dimension 1, la seule condition à satisfaire est $e_1.e_1 = 1$. Il suffit de prendre un vecteur x non nul. On a alors $x.x > 0$, et on pose $e_1 = \dfrac{x}{\sqrt{x.x}}$.
Dans le cas général, soit F un hyperplan de E (c'est-à-dire un sous-espace de dimension $n-1$, pour E de dimension n). Par hypothèse de récurrence, on peut supposer que $(e_, \ldots, e_{n-1})$ est une base orthonormée de F. Soit alors x un vecteur n'appartenant pas à F, et posons :

$$y = x - (e_1.x)e_1 - \ldots - (e_{n.-1}.x)e_{n-1}.$$

Il est immédiat que y est orthogonal à F, car tous les produits scalaires $y.e_i$ sont nuls. Par ailleurs, y n'est pas nul, car s'il l'était, il serait dans F, et donc x y serait aussi. On peut donc poser :

$$e_n = \frac{y}{\sqrt{y.y}},$$

et on voit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E. □

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1 *On désigne par E_1, E_2, F et G des espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, par u et v des endomorphismes de E, par w une application linéaire de F dans G et par f une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.*

1. *Montrer que l'application g de $E_1 \times E_2$ dans F définie par*

$$(x, y) \longmapsto f(u(x), v(y))$$

   est bilinéaire.

2. *Montrer que l'application composée $w \circ f$ est bilinéaire.*
3. *Soit $E_1 = E_2 = E = \mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que les applications φ et ψ de $E_1 \times E_2$ dans E définies par*

$$\varphi(PQ) = (PQ)', \quad \text{où} \quad (PQ)' \text{ est la dérivée de } PQ$$

$$\psi(PQ) = S, \quad \text{où} \quad S(X) = P(X-1)Q(X)$$

Exercice 4.5.2 *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$ et $\{u_1, \ldots, u_m\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sont des bases de E et F respectivement. Soit G un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension mn et les mn vecteurs d'une base de G notés e_{ij} sont indexés par les couples d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$. On définit l'application φ de l'ensemble produit $E \times F$ dans G par*

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j e_{ij} \quad \text{si} \quad x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i u_i \quad \text{et} \quad y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j v_j$$

1. *Montrer que, si H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et f une application bilinéaire de $E \times F$ dans H, alors il existe une application linéaire et une seule g de G dans H telle que*

$$f = g \circ \varphi.$$

*Soient $\mathcal{B}(E, F; H)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $E \times F$ dans H et $\mathcal{L}(G, H)$ l'espace des applications linéaires de G dans H. *Quelles sont les propriétés de l'application Φ : $\mathcal{B}(E, F; H) \to \mathcal{L}(G, H)$, $f \mapsto g = \Phi(f)$.*

2. *Vérifier que φ est bilinéaire.*
3. *On désigne par $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ des bases de E et F.*
   (a) *Ecrire l'expression de $\varphi(x, y)$ en fonction des coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_m$ et $\eta'_1, \ldots, \eta'_n$ de x et y dans les bases $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$.*
   (b) *Montrer que les vecteurs $e'_{hk} = \varphi(u'_h, v'_k)$ forment une base de G, puis donner les coordonnées de ces vecteurs dans la base e_{ij} en fonction des termes des matrices de passage des bases $\{u_1, \ldots, u_m\}$ et $\{v_1, \ldots, v_n\}$ aux bases $\{u'_1, \ldots, u'_m\}$ et $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$*
4. *Peut-on définir pour les applications trilinéaires une décomposition qui généralise celle indiquée en question 1. our les applications bilinéaires ?*

Exercice 4.5.3 *Soit Ω une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, on sait que :*

(i) *il existe des formes linéaires indépendantes f_i telle que*

$$\Omega = \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i f_i^2(x) \quad \text{où} \quad \varepsilon_i = \pm 1$$

(ii) *le nombre p des formes f_i est le même pour toutes les décompositions de Ω du type précédent (p est le rang de Ω).*

Établir que pour deux décompositions de ce type, le nombre des coefficients ε_i égaux à 1 est le même (et donc aussi le nombre des coefficients ε_i égaux à (-1)).

Exercice 4.5.4 *On considère la forme quadratique f définie dans $\mathbb{R}^4$ par :*

$$f(X) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2t^2 + 2xy + 2xt + 2yt + 2yz - 2zt$$

où x, y, z, t désignent les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. *Déterminer des formes linéaires indépendantes ℓ_i telles que :*

$$f(X) = \sum_i \varepsilon_i [\ell_i(X)]^2, \quad \text{avec} \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

2. *Indiquer une base de $\mathbb{R}^4$ telle que la matrice de f dans cette base soit diagonale.*

Exercice 4.5.5 *On considère la forme quadratique f définie dans $\mathbb{R}^3$ par :*

$$f(X) = 4x^2 + 4y^2 + z^2 + 2yz + 2zx - 4xy$$

où x, y, z désignent les coordonnées de X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. *Déterminer le rang de la forme f et chercher si cette forme est positive (On pourra pour cela écrire f comme combinaison linéaire des carrés de formes linéaires indépendantes).*
2. *Déterminer la matrice a de la forme quadratique f.*
3. *Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de la forme f dans cette base soit diagonale ; on donnera la matrice de passage P et son inverse P^{-1}.*
4. *Utiliser les résultats du $3.$ pour retrouver les résultats du $1.$.*

Exercice 4.5.6 *On déssigne par f une forme quadratique $\mathbb{R}^n$ et par $A = (a_{ij})$ sa matrice dans la base canonique ; on écrira :*

$$f(X) = X^T AX = (AX, X)$$

où $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est le vecteur X relativament à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que la forme f est positive non dégénérée.

1. *Montrer qu'il existe des formes linéaires ℓ_i telles que :*

$$\ell_i(X) = \sum_{j \geq i} a_{ij}\xi_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} [\ell_i(X)]^2$$

et que ces formes sont uniques si on impose les conditions :

$$a_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

2. *Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure et une seule $T = (\theta_{ij})$ satisfaisant aux conditions : "les termes θ_{ii} de la diagonale sont positifs $A = T^T T$"*
3. *Peut-on énoncer un résultat analogue à celui du $2)$ si la A est la matrice d'une forme quadratique hermitienne sur $\mathbb{C}^n$ positive et non dégénérée ?*

Exercice 4.5.7 1. *On désigne par S une matrice carrée symétrique à termes réels d'ordre n et par L une matrice colonne à n termes réels ; on suppose que la matrice S est inversible.*
On définit une application f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ en posant pour toute matrice colonne X ayant n termes réels :

$$f(X) = X^T SX + 2L^T X + \delta.$$

(a) *Montrer qu'il existe une matrice colonne unique U telle que le changement de variable : $X = U + Y$ transforme $f(X)$ en la somme d'une forme quadratique en Y et d'une constante.*

(b) *En déduire qu'il existe une matrice orthogonale P telle que si :*

$$X = U + PZ$$

et si $\xi_1, \dots, \xi_n$ sont les termes de Z :

$$f(X) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon.$$

(c) *En considérant la forme quadratique F définie sur $\mathbb{R}^{n+1}$ par :*

$$F(X,\theta) = X^T S X + 2L^T X\theta + \delta\theta^2$$

(X est la matrice des n premières coordonnées et θ la $(n+1)$-ième coordonnée d'un élément de $\mathbb{R}^{n+1}$), montrer que :

$$\varepsilon = \frac{det\begin{pmatrix} S & L \\ L^T & \delta \end{pmatrix}}{det(S)}$$

2. *On considère l'application φ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :*

$$\varphi(X) = 3(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz=zx) - 4x - 4y + 4z,$$

où x, y, z désignent les termes de la matrices colonne X.
On sait qu'il existe une matrice colonne U et une matrice orthogonale P telles que si ξ_1, ξ_2, ξ_3 sont les termes de la matrice colonne $Z = P^{-1}(X-U)$

$$\varphi(X) = \sum_{i=1}^{3} \rho_i \xi_i^2 + \varepsilon.$$

Déterminer les nombres ρ_i, ρ_2, ρ_3 et ε ; puis retruver la valeur de ε en déterminant la matrice U.

Exercice 4.5.8 *On considère l'espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ des matrices colonnes X à termes complexes et on pose*

$$\|X\|^2 = \bar{X}^T X.$$

On désigne par A une matrice carrée d'ordre n à termes complexes hermitienne, c'est-à-dire telle que

$$A^T = \bar{A}$$

(on note $\bar{X}$ et $\bar{A}$ les matrices obtenues en remplaçant chaque terme de X ou de A par le nombre conjugué).

1. *Montrer que si I est la matrice unité et α et β des nombres réels, alors :*

$$\|(A-(\alpha+\mathrm{i}\beta)I)X\|^2 = \|(A-\alpha I)X\|^2 + \beta^2\|X\|^2$$

2. *Retrouver ainsi que les valeurs propres de A sont réelles.*

Exercice 4.5.9 1. *On considère un espace euclidien E et un sous-espace vectoriel F de E, ces espaces étant de dimension finie ou non.*

(a) *On donne un vecteur x de E. En étudiant la distance de x au vecteur $x_0 + \lambda y$, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que x_0 soit de tous les vecteurs de F un de ceux dont la distance à x est minimum est que $x - x_0$ soit orthogonal à tous les vecteurs de F.*

(b) *Montrer qu'il ne peut exister deux vecteurs de F dont la distance à x soit minimum.*

(c) *Montrer que si F est de dimension finie, alors il existe effectivement un vecteur x_0 de F dont la distance à x est minimum.*

2. (a) *Montrer que dans l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$, on peut définir un produit scalaire en posant :*

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt.$$

Quelle est la norme associée à ce produit scalaire ? nous désignerons par E l'espace euclidien (de dimension infinie) ainsi obtenu.

(b) *Montrer que dans E, les fonctions 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$ (k et h étant des entiers naturels arbitraires) sont deux à deux orthogonales.*

(c) *On prend pour F l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques d'ordre n (c'est-à-dire combinaisons linéaires de 1, $\cos(kt)$ et $\sin(ht)$, avec $k \geq n$ et $h \geq n$). Déterminer le polynôme Q dont la distance à une fonction f donnée est minimum.*

Exercice 4.5.10 1. *Soit E l'espace vectoriel réel dont les éléments sont les fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et indéfiniment dérivables.*

(a) *Montrer que les applications $f \mapsto f(0)$, $f \mapsto f''(1)$ et $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ de E dans $\mathbb{R}$ sont des formes linéaires sur E.*

(b) *Montrer que les applications $f \mapsto f(0) + 1$ et $f \mapsto (f'(2))^2$ ne sont pas des formes linéaires.*

2. *Montrer que les applications $f : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$ et $g : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$, et qu'elles sont linéairement indépendantes.*

3. *Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $((x, y, z), (x', y', z')) \mapsto xx' + yz'$ est une forme bilinéaire dégénérée. Trouver les noyaux des deux homomorphismes associés canoniquement à f.*

Exercice 4.5.11 1. *Soient (e_1, e_2, e_3) une base d'un espace vectoriel réel E, (e_1^*, e_2^*, e_3^*) la base duale de E^*. Montrer que $(2e_1, 5e_2, -e_3)$ est une base de E, et que la base duale est $(\frac{1}{2}e_1^*, \frac{1}{5}e_2^*, -e_3^*)$.*

2. *Soiet E l'espace vectoriel des polynômes en x à coefficients réels. Pour tout polynôme P, soit f_P la fonction sur E qui associe, à tout polynôme Q, le nombre $\int_0^1 P(x)Q(x)dx$.*

(a) *Montrer que f_P est une forme linéaire sur E*

(b) *Trouver les polynômes P de degré 2 tels que f_P soit orthogonal aux polynômes 1 et x.*

3. *On munit $\mathbb{R}^3$ de la forme bilinéaire canonique, c'est-à-dire le produit scalaire. Trouver les éléments de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux à $u = (2, -1, -1)$ et à $v = (1, 3, -4)$.*

4. *Soit E un espace vectoriel, u un automorphisme de E. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a ${}^t(u^n) = ({}^tu)^n$.*

Exercice 4.5.12 *On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $((x, y), (x', y')) \mapsto 2xx' - 4xy' + 5x'y + byy'$.*

1. *Montrer que f est une forme bilinéaire.*
2. *Déterminer b pour que f soit dégénérée.*
3. *Trouver les noyaux des deux homomorphismes associés canoniquement à f.*

Chapitre 5

Produit mixte et produit vectoriel dans un espace ordinaire orienté

5.1 Groupe de permutations

soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

5.1.1 Définitions et notations

Définition 5.1.1 *Le groupe des permutaions de $\mathcal{E}_n$, noté $\mathcal{S}_n$, est le groupe $\mathcal{S}(\mathcal{E}_n)$ des bijections de $\mathcal{E}_n$ dans lui même muni de la composition des applications.*
*Un élément de $\mathcal{S}_n$ est appelé***permutation***.*

Notations :

1. une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est notée généralement

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

2. La composée $\sigma_1 \circ \sigma_2$ de deux éléments de $\mathcal{S}_n$ est notée $\sigma_1\sigma_2$.

Définition 5.1.2 *Soit $n \geq 2$, une transposition est une permutation qui échange deux éléments de $\mathcal{E}_n$ entre eux et laisse les autres fixes.*

$$\begin{array}{lcl} \tau \in \mathcal{S}_n \ \textit{ est une transposition} & \Leftrightarrow & \exists (i,j) \in \mathcal{E}_n \quad \textit{tels que} \quad (i \neq j) \quad \tau(i) = j \textit{ et } \tau(j) = i \\ & & \textit{et } \tau(p) = p, \ \forall p \in \mathcal{E}_n - \{i, j\} \end{array}$$

On note toute **transposition** *par $\tau = \tau_{i,j}$.*

Remarque 5.1.1 1. *Si τ est une transposition alors $\tau \circ \tau = \tau^2 = id$ ainsi on a $\tau^{-1} = \tau$.*

2. *Si $n \geq 2$, $(\mathcal{S}_n, \circ)$ n'est pas un groupe commutatif :*

$$\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3}(3) = \tau_{1,2}(1) = 2 \quad \textit{et} \quad \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}(3) = \tau_{1,3}(3) = 1$$

   donc $\tau_{1,2} \circ \tau_{1,3} \neq \tau_{1,3} \circ \tau_{1,2}$.

Théorème 5.1.1 *Soit $n \geq 2$, toute permutation peut-être décomposée en un produit de transposition. c'est-à-dire $\mathcal{S}_n$ est engendré par la transposition.*

Démonstration. Par récurrence sur n.
- Pour $n = 2$, alors $\mathcal{S}_2 = \{id, \tau_{1,2}\}$.
- Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n-1$ et soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ alors il y a deux cas qui se produisent :
  - ◇ 1^{er} cas : $\sigma(n) = n$ et $\sigma\lfloor_{\{1,2,3,\ldots,n-1\}} = \sigma'$ est une bijection de $\mathcal{E}_{n-1}$ dans lui-même.
    donc $\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}$, l'hypothèse de récurrence affirme qu'il existe : τ'_1, τ'_2,. . .,τ'_p des transpositions de $\mathcal{S}_{n-1}$ telles que
    $$\sigma' = \tau'_1\tau'_2 \ldots \tau'_p$$
    En prolongeant chaque τ'_i à $\mathcal{E}_n$ par $\tau_i(n) = n$ et
    $$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n-1\} : \quad \tau_i(j) = \tau'_i(j)$$
    on trouve que chaque τ_i est une permutation de $\mathcal{S}_n$ et $\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_p$.
  - ◇ $2^{\text{ème}}$ cas : $\sigma(n) = q < n$, soit τ_{nq} la transposition qui échange q et n, alors
    $$\tau_{n,q}\sigma(n) = \tau_{n,q}(q) = n.$$
    D'après le premier cas, on sait qu'il existe τ_1, τ_2,. . .,τ_p des transpositions telles que
    $$\tau_{nq}\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_p$$
    d'où $\sigma = \tau_{n,q}\tau_1\tau_2 \ldots \tau_p$ car $\tau_{n,q} = \tau_{n,q}^{-1}$
- D'après la propriété de récurrence on a le résultat qu'une permutation est le produit de compositions.

□

5.1.2 Signature d'une permutation

Définition 5.1.3 *A toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe un nombre, noté $\varepsilon(\sigma)$, appelé la* **signature** *de σ défini comme suit :*
1. *$\varepsilon(id) = 1$,*
2. *si $\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_p$ est une décomposition de σ en produit de transpositions, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$.*

Remarque 5.1.2 1. *Pour tout transposition τ, on a $\varepsilon(\tau) = -1$*

2. *La signature de $\sigma \in \mathcal{S}_n$, ne dépond pas de la décomposition de σ en produit de transpositions, en effet,*
   si $\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_p = \tau'_1\tau'_2 \ldots \tau'_s$ ou τ_i et τ_j sont des transpositions, alors
   $$(\tau'_s\tau'_{s-1} \ldots \tau'_1)(\tau_1\tau_2 \ldots \tau_p) = id$$
   d'où $\varepsilon(id) = 1 = (-1)^{p+s}$,
   d'où $(-1)^p = (-1)^{2p+s} = (-1)^s$.

3. *Une permutation de signature 1 est appelée une* **permutation paire**, *et une permutation de signature* (-1) *est appelée une* **permutation impaire**.

Exemple 5.1.1 *Soit* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
On a $\tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau_{1,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $\tau_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *alosr*

$$\sigma = \tau_{1,2}\tau_{1,3}\tau_{1,4}$$

D'où σ *est une permutation impaire puisque* $\varepsilon(\sigma) = (-1)^3 = -1$

Proposition 5.1.1 *Pour tous* σ *et* σ' *dans* $\mathcal{S}_n$, *on a*

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = \varepsilon(\sigma).\varepsilon(\sigma').$$

Démonstration. Soit $\sigma = \tau_1\tau_2 \dots \tau_p$ et $\sigma' = \tau_1'\tau_2' \dots \tau_s'$, alors

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^p \quad \text{et} \quad \varepsilon(\sigma') = (-1)^s$$

Donc

$$\sigma \circ \sigma' = (\tau_1\tau_2 \dots \tau_p) \circ (\tau_1'\tau_2' \dots \tau_s')$$

D'où

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') = (-1)^{p+s} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\sigma \circ \sigma') = (-1)^p(-1)^s = \varepsilon(\sigma).\varepsilon(\sigma').$$

□

Remarque 5.1.3 *Soit* $n \geq 2$ *et soit* $\varepsilon : (\mathcal{S}_n, \circ) \to (\{-1, 1\}, \cdot)$, $\sigma \mapsto \varepsilon(\sigma)$ *alors* ε *est un homomorphisme de groupes surjectif car* $1 = \varepsilon(id)$ *et* $(-1) = \varepsilon(\tau_{1,2})$.
ker(ε) *est un sous-groupe distingué de* $\mathcal{S}_n$, *noté* $\mathcal{A}_n$, *appelé le sous-groupe des permutations paires (car* $\sigma \in$ *ker*$(\varepsilon) = \mathcal{A}_n \Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma$*est une permutation paire)*

5.2 Orientation des espaces vectoriels réels

Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n > 0$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On a

$$det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0,$$

donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$ où bien $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$.

Définition 5.2.1 *On dit* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *sont de mêmes* **sens** *si det*$_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$, *et de* **sens contraires** *si det*$_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') < 0$

Soit $\mathbb{B}$ l'ensemble des bases de E. On définit sur $\mathbb{B}$ une relation $\mathcal{R}$ par :

$$\mathcal{R} : \quad \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' \quad \text{sont de même sens.}$$

Théorème 5.2.1 1. *La relation* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence dans* $\mathbb{B}$.

2. *Il y a deux classes d'équivalence suivant $\mathcal{R}$.*

Démonstration.

1. (a) Si $\mathcal{B} \in \mathbb{B}$, on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, donc la relation est réflexive.
   (b) On a
   $$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1,$$
   alors $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ sont de même signe, donc la relation est symétrique.
   (c) si $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'' \in \mathbb{B}$, on a
   $$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'').\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$
   donc la relation est transitive.
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Posons $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}, -e_n)$.
   On a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_1) = -\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = -1$.
   Par suite, si $\mathcal{B}'$ est un élément quelconque de $\mathbb{B}$, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}') =$; donc $\mathcal{B}'$ est de même sens que $\mathcal{B}$ ou de même sens que $\mathcal{B}_1$. Ceci pouve le résultat.

□

Théorème 5.2.2 *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, et soit σ une permutation de $\mathcal{E}_n$. Les bases $\mathcal{B}' = (e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ sont de mêmes sens si σ est une permutation paire, de sens contraires si σ est une permutation impaire.*

Démonstration. On a
$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \varepsilon(\sigma)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \varepsilon(\sigma)$$
avec $\varepsilon(\sigma) = 1$ si σ est paire et $\varepsilon(\sigma) = -1$ si σ est impaire. D'où le résultat. □

Définition 5.2.2 *On dit que E est* **orienté** *si l'on a choisi l'une des deux classes d'équivalences dans $\mathbb{B}$.*
Les bases appartenant à cette classe sont alors dites de **sens positif**, *les bases appartenant à l'autre classe sont dites de* **sens négatif**.
*Dans l'espace ordinaire, les physiciens choisissent généralement les bases définies par l'***observateur d'Ampère**.
Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, on choisit généralement les bases de même sens que la base canonique.

Théorème 5.2.3 *Soit u un automorphisme de E.*

1. *Si det$(u) > 0$ alors u transforme toute base en une base de même sens.*
2. *Si det$(u) < 0$ alors u transforme toute base en une base de sens contraire.*

Démonstration. On a
$$\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det(u)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \det(u)$$
D'où le résultat. □

Définition 5.2.3 *On dit que u* **conserve l'orientation** *dans le premier cas du théorème précédent,* **renverse l'orientation** *dans le deuxième cas.*
Les automorphismes de E conservant l'orientation forment un sous-groupe de $GL(E)$. Le sous-groupe est noté $GL_+(E)$ lorsque l'orientation est positive et il est noté $GL_-(E)$ lorsque l'orientation est négative.

Exemple 5.2.1 *1. Supposons que E est un espace vectoriel de dimension 1, alors E est une droite vectorielle. Une base de E se compose d'un seul vecteur non nul, noté e. Soient $\mathcal{B} = \{e\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'\}$ deux bases de E, alors on a $e' = \lambda e$ avec λ est un nombre réel non nul. alors on a*

$$det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \lambda det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda$$

donc

(a) $\mathcal{B} = \{e\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'\}$ sont de mêmes sens si $\lambda > 0$,

(b) $\mathcal{B} = \{e\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'\}$ sont de sens contraire si $\lambda < 0$

Une classe d'équivalence dans $\mathcal{B} = \{e\}$ se compose de tous les vecteurs déduits de e par une homothétie de rapport > 0, l'autre classe d'équivalence se compose de tous les vecteurs déduits de e par une homothétie de rapport < 0. **Le choix d'une de ces deux classes correspond bien à l'intuition classique de l'orientation d'une droite**.

2. Supposons que E est de dimension 2, alors E est un plan vectoriel. Soient $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ et $\mathcal{B}' = \{e_1, e_2'\}$ deux bases de E dont le premier vecteur soit le même. Si (ξ, η) sont les coordonnées de e_2' par rapport à $\mathcal{B}$, on a

$$det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = det \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & \eta \end{pmatrix} = \eta$$

Donc, pour que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ soient de même sens, il faut et il suffit que $\eta > 0$, c'est-à-dire que e_2 et e_2' soient **d'un même côté** *de la droite de vecteur directeur e_1.*

5.3 Produit mixte dans l'espace ordinaire orienté

Définition 5.3.1 *On appelle* **espace vectoriel ordinaire** *tout espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ de dimension 3.*

Soit E un espace vectoriel ordinaire orienté. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E de sens positif (il en existe si la base orthonormale (e_1, e_2, e_3) est un sens négatif, il suffit de remplacer e_1 par $-e_1$).

Proposition 5.3.1 *Soient V, V' et V'' trois vecteurs de E. Le nombre*

$$det_{\mathcal{B}}(V, V', V'')$$

est indépendant du choix de la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ une autre base orthonormale de sens positif. Montrons que

$$\det_{\mathcal{B}}(V, V', V'') = \det_{\mathcal{B}'}(V, V', V'').$$

Or $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont de la même classe d'équivalence alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$. Donc

$$\det_{\mathcal{B}}(V, V', V'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(V, V', V'')$$

D'où

$$\det_{\mathcal{B}}(V, V', V'') = \det_{\mathcal{B}'}(V, V', V'').$$

□

Définition 5.3.2 *Le nombre* $det_{\mathcal{B}}(V, V', V'')$ *s'appelle le* **produit mixte** *de* V*,* V' *et* V''*.*
Le **produit mixte** *de* V*,* V' *et* V'' *est noté par* (V, V', V'')*.*

Remarque 5.3.1 *Il faut prendre garde de cette notation, elle désigne parfois la suite des trois vecteurs* V*,* V' *et* V''*.*

Propriété 5.3.1 *Soient* V*,* V' *et* V'' *trois vecteurs de* E

1. *Le produit mixte* (V, V', V'') *dépend linéairement de chacun des vecteurs* V*,* V' *et* V''*.*
2. *On a* $(V, V', V'') = (V', V'', V) = (V'', V, V') = -(V', V, V'') = -(V, V'', V') = -(V'', V', V)$*.*
3. *On a* $(V, V', V'') \neq 0$ *si et seulement si les vecteurs* V*,* V' *et* V'' *sont linéairement indépendants.*
4. *On a* $(V, V', V'') > 0$ *si la base* $\{V, V', V''\}$ *est de sens positif, et* $(V, V', V'') < 0$ *si la base* $\{V, V', V''\}$ *est de sens négatif.*
5. *Soient* (ξ, η, ζ)*,* (ξ', η', ζ') *et* (ξ'', η'', ζ'') *les coordonnées de* V*,* V' *et* V'' *par rapport à une base orthonormale de sens positif, alors*

$$(V, V', V'') = det \begin{pmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{pmatrix}$$

5.3.1 Produit vectoriel dans l'espace ordinaire orienté

Soit E l'espace vectoriel ordinaire orienté. Fixons V et V' de E.
L'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $W \longmapsto (V, V', W)$ est une forme linéaire, alors il existe un et un seul vecteur U de E tel que

$$\Phi(W) = (V, V', W) = U \cdot W, \quad \forall W \in E.$$

Le vecteur U dépend de V et V'

Définition 5.3.3 *On appelle le* **produit vectoriel** *de* V *et* V'*, noté par* $V \wedge V'$*, le vecteur* U *tel que*

$$(V, V', W) = U \cdot W, \quad \forall W \in E.$$

Ainsi, pour tous V*,* V' *et* V'' *dans* E *on a*

$$(V, V', V'') = (V \wedge V') \cdot V''$$

Théorème 5.3.1 *Soit* V *et* V' *dans* E*. Pour que* V *et* V' *soient linéairement dépendants (ou colinéaires), il faut et il suffit que* $V \wedge V' = 0$*.*

Démonstration. Si v et V' sont linéairement dépendants, alors on a $(V, V', V'') = 0$ quel que soit V'' dans E,
donc $(V \wedge V') \cdot V'' = 0$ quel que soit V'' dans E,
d'où $V \wedge V' = 0$.
Si V et V' sont linéairement indépendants, alors il existe V'' tel que V, V' et V'' soient linéairement indépendants, donc tel que $(V, V', V'') \neq 0$, d'où $V \wedge V' \neq 0$. $\square$

Corollaire 5.3.1 *On a $V \wedge V = 0$ quel que soit V dans E.*

Propriété 5.3.2 *Soient V, V' et W trois vecteurs de E. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Le vecteur $V \wedge V'$ dépend linéairement de V et V'.*
2. *$V \wedge V' = -V' \wedge V$.*
3. *$V \wedge V'$ est orthogonale à V et V'.*
4. *Si V et V' sont linéairement indépendants, alors le système $\{V, V', V \wedge V'\}$ est une base de sens positif.*

Démonstration. Soient V, V' et W trois vecteurs de E,

1. En effet,

$$\begin{array}{rcl} (\lambda V_1 + \mu V_2, V', W) & = & \lambda(V_1, V', W) + \mu(V_2, V', W) \\ & = & \lambda(V_1 \wedge V') \cdot W + \mu(V_2 \wedge V') \cdot W \\ & = & [\lambda(V_1 \wedge V') + \mu(V_2 \wedge V')] \cdot W \end{array}$$

   or par la définition du produit vectoriel, on a $(\lambda V_1 + \mu V_2, V', W) = ((\lambda V_1 + \mu V_2) \wedge V') \cdot W$, alors

$$(\lambda V_1 + \mu V_2) \wedge V' = \lambda(V_1 \wedge V') + \mu(V_2 \wedge V')$$

   donc on voit bien que $V \wedge V'$ dépend linéairement de V'.
2. On a $0 = (V + V') \wedge (V + V')$, alors

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & (V + V') \wedge (V + V') \\ & = & (V \wedge V) + (V \wedge V') + (V' \wedge V) + (V' \wedge V') \\ & = & (V \wedge V') + (V' \wedge V) \end{array}$$

   d'où $V \wedge V' = -V' \wedge V$.
3. On a $(V, V', V) = 0$ et $(V, V', V') = 0$ alors

$$0 = (V, V', V) = (V \wedge V') \cdot V \quad \text{et} \quad 0 = (V, V', V') = (V \wedge V') \cdot V'$$

   donc $V \wedge V'$ est orthogonale à V et V'.
4. On a

$$(V, V', V \wedge V') = (V \wedge V') \cdot (V \wedge V') = \|V \wedge V'\|^2 > 0$$

   d'où le résultat.

□

5.3.2 Application bilinéaire alternée

Définition 5.3.4 *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels. Une application*

$$f : E_1 \times E_1 \to E_2$$

est dite bilinéaire alternée si elle vérifie les axiomes suivants :
(A_1) $(\forall x \in E_1)$, $(\forall y \in E_1)$: $f(x,y) = -f(y,x)$;
(A_2) *Pour tous scalaires réels λ et μ, et pour tous éléments x, y et z de E_1, on a*

$$f(x, \lambda y + \mu z) = \lambda f(x,y) + \mu f(x,z).$$

Les axiomes (A_1) et (A_2) entraînent évidemment : pour tous scalaires réels λ et μ, et pour tous éléments x, y et z de E_1 :

$$f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x,z) + \mu f(y,z).$$

D'après (A_2), si $x \in E_1$ est fixé, l'application $u : E_1 \to E_2$, $y \mapsto u(y) = f(x,y)$ est linéaire. En particulier, $f(x, O_{E_1}) = 0_{E_2}$.
De même, si $y \in E_1$ est fixé, l'application $v : E_1 \to E_2$, $y \mapsto v(x) = f(x,y)$ est linéaire. En particulier, $f(O_{E_1}, y) = 0_{E_2}$.
D'après (A_1), on a $f(x,x) = 0_{E_2}$ pour tout $x \in E_1$, car $f(x,x) = -f(x,x)$, d'où $2f(x,x) = 0_{E_2}$ et donc

$$f(x,x) = 0_{E_2}.$$

Dans le théorème suivant, nous nous intéresserons au cas où $E_1 = E_2 = E$ avec E est un espace vectoriel de dimension 3.

Théorème 5.3.2 *Soit E un espace vectoriel ordinaire orienté et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour tous vecteurs v_1, v_2 et v_3 de E, il existe une unique application bilinéaire alternée $f : E \times E \to E$ telle que*

$$f(e_2, e_3) = v_1, \quad f(e_3, e_1) = v_2 \quad \textit{et} \quad f(e_1, e_2) = v_3.$$

Démonstration. La démonstration se fait en deux étapes :

a **Unicité**. Si f existe, soit $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E$ et $Y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \in E$ avec les x_i et y_i sont des réels.
Alors :

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= \sum_{i=1}^{3} f(x_ie_i, y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3) \\ &= x_1y_1f(e_1,e_1) + x_1y_2f(e_1,e_2) + x_1y_3f(e_1,e_3) \\ &\quad +x_2y_1f(e_2,e_1) + x_2y_2f(e_2,e_2) + x_2y_3f(e_2,e_3) \\ &\quad +x_3y_1f(e_3,e_1) + x_3y_2f(e_3,e_2) + x_3y_3f(e_3,e_3) \end{aligned}$$

Mais $f(e_i, e_i) = 0_E$ pour tout i, et si $i \neq j$, on a

$$f(e_i, e_j) = -f(e_j, e_i).$$

D'où :

$$\begin{aligned} f(X,Y) &= (x_1y_2 - x_2y_1)f(e_1,e_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)f(e_3,e_1) + (x_2y_3 - x_3y_2)f(e_2,e_3) \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)v_3 + (x_3y_1 - x_1y_3)v_2 + (x_2y_3 - x_3y_2)v_1 \end{aligned}$$

$$f(X,Y) = (x_2y_3 - x_3y_2)v_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)v_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)v_3. \tag{0.1}$$

Si donc f existe, elle est déterminée de manière unique par Eq.(0.1).

b **Existence**. Désignons par $f : E \times E \to E$ l'application qui, à tout couple $(X, Y) \in E \times E$, associe le vecteur écrit au second membre Eq.(0.1) (les x_i et les y_i étant les coordonnées respectives de X et Y dans la base $\mathcal{B}$).
Il suffit de vérifier que f est bien bilinéaire et alternée.
L'axime (A_1) se vérifie aussitôt. L'axiome (A_2) se vérifie par un calcul facile (que nous laissons au lecteur le soin de traiter à titre d'exercice).

□

Proposition 5.3.2 *Soient E un espace vectoriel ordinaire orienté et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Alors le produit vectoriel est l'unique application bilinéaire alternée de $E \times E$ dans E, notée $\Lambda_{\mathcal{B}}$, défine par*

$$\Lambda_{\mathcal{B}}(e_1, e_2) = e_3, \quad \Lambda_{\mathcal{B}}(e_2, e_3) = e_1 \quad \textit{et} \quad \Lambda_{\mathcal{B}}(e_3, e_1) = e_2$$

5.3.3 Coordonnées du produit vectoriel par rapport à une base orthonormale de sens positif

Proposition 5.3.3 *Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale d'un espace vectoriel ordinaire de sens positif. Soit (ξ, η, ζ) les coordonnées de V et (ξ', η', ζ') celles de V'. Alors, les coordonnées (α, β, γ) du vecteur $V \wedge V'$ sont données par*

$$\alpha = \eta\zeta' - \zeta\eta', \quad \eta = \zeta\xi' - \xi\zeta' \quad \textit{et} \quad \zeta = \xi\eta' - \eta\xi'.$$

En particulier, on a

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad \textit{et} \quad e_3 \wedge e_1 = e_2.$$

Démonstration. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale d'un espace vectoriel ordinaire de sens positif. Soit (ξ, η, ζ) les coordonnées de V, (ξ', η', ζ') celles de V' et (α, β, γ) les coordonnées de $V \wedge V'$. Quel que soit le vecteur V'' de coordonnées (ξ'', η'', ζ''), on a

$$\begin{aligned}
\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'' &= (V \wedge V') \cdot V'' \\
&= (V, V', V'') \\
&= \det \begin{pmatrix} \xi & \xi' & \xi'' \\ \eta & \eta' & \eta'' \\ \zeta & \zeta' & \zeta'' \end{pmatrix} \\
&= (\eta\zeta' - \zeta\eta')\xi'' + (\zeta\xi' - \xi\zeta')\eta'' + (\xi\eta' - \eta\xi')\zeta''
\end{aligned}$$

Cette égalité étant valable quels que soient ξ'', η'' et ζ'', on voit que

$$\alpha = \eta\zeta' - \zeta\eta', \quad \eta = \zeta\xi' - \xi\zeta' \quad \text{et} \quad \zeta = \xi\eta' - \eta\xi'.$$

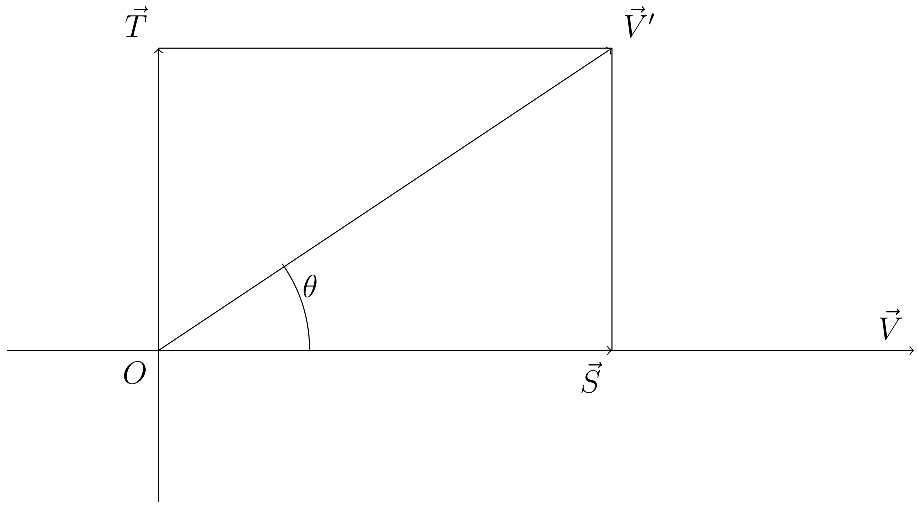
□

Théorème 5.3.3 *Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale d'un espace vectoriel ordinaire de sens positif, et V et V' deux vecteurs non nuls de E. On suppose que l'angle $(\widehat{V, V'}) = \theta \in [0, \pi]$. Alors*

$$\|V \wedge V'\| = \|V\|.\|V'\| \sin(\theta)$$

est l'aire du parallèlogramme formé par les vecteurs V et V'.

Démonstration. Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormale d'un espace vectoriel ordinaire de sens positif, et V et V' deux vecteurs non nuls de E. On suppose que l'angle $(\widehat{V, V'}) = \theta \in [0, \pi]$



Décomposons V' en la somme d'un vecteur S colinéaire à V et d'un vecteur T orthogonal à V : $V' = S + V$. On a

$$\begin{aligned} V \wedge V' &= V \wedge (S+T) \\ &= V \wedge S + V \wedge T \\ &= V \wedge T \quad \text{car } V \text{ et } S \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

Notons $\|W\|$ la norme (longueur) d'un vecteur quelconque W. Alors

$$\|V \wedge T\| = \|V\|.\|T\|$$

Or $\|T\| = \|V'\| \sin(\theta)$, alors $\|V\|.\|T\| = \|V\|.\|V'\| \sin(\theta)$.
Donc $\|V \wedge V'\| = \|V\|.\|V'\| \sin(\theta)$ (car $V \wedge V' = V \wedge T$) qui est l'aire du parallèlogramme formé par V et V'. $\square$

5.4 Exercices

Exercice 5.4.1 *Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E. Montrer que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ sont inverses l'un de l'autre.*

Exercice 5.4.2 *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs*

$$x = (1,1,1), \quad y = (2,3,4) \quad \textit{et} \quad z = (4,9,16)$$

relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. *Calculer $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$. En déduire que le système $\{x, y, z\}$ est une autre base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Calculer les coordonnées des vecteurs $x \wedge y$, $y \wedge z$ et $z \wedge x$.*

3. *Calculer la norme de chacun des vecteurs x, y, z, $x \wedge y$, $y \wedge z$ et $z \wedge x$, puis en déduire les angles $\widehat{xy}$, $\widehat{yz}$ et $\widehat{zx}$.*

Exercice 5.4.3 *Soit E l'espace vectoriel des vecteurs libres de l'espace ordinaire, supposé orienté. Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{R}$, $\vec{S}$ et $\vec{Y}$ des vecteurs de E.*

1. *Montrer que $\vec{W} = (\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{R} = (\vec{U} \cdot \vec{R})\vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{R})\vec{U}$.*
2. *En déduire $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge (\vec{R} \wedge \vec{S})$.*

Exercice 5.4.4 *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels ordinaires orientés et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E_1. Soit (v_1, v_2, v_3) un système de trois vecteurs de E_2. A tous vecteurs $X = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \in E_1$ et $Y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 \in E_1$ on associe le vecteur*

$$f(X, Y) = (x_2y_3 - x_3y_2)v_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)v_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)v_3 \in E_2.$$

Démontrer que $f : E_1 \times e_1 \to E_2$ est une application bilinéaire alternée.

Exercice 5.4.5 *Soit P un plan vectoriel.*

1. *On donne une base $\mathcal{B}$ de P. A tout couple (X, Y) de vecteurs de P, on associe le réel*

   $$f(X, Y) = det_{\mathcal{B}}(X, Y).$$

   Démontrer que l'application $f : P \times P \to \mathbb{R}$ est bilinéaire alternée.
2. *Soit $g : P \times P \to \mathbb{R}$, une application bilinéaire alternée.*
   Démontrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de P, il existe un unique scalaire $\lambda_{\mathcal{B}}$ tel que :

   $$(\forall X \in P) \quad (\forall Y \in P) \quad g(X, Y) = \lambda_{\mathcal{B}} det_{\mathcal{B}}(X, Y).$$

3. *En déduire que toutes les applications bilinéaires alternées de $P \times P$ dans $\mathbb{R}$ sont proportionnelles.*

Exercice 5.4.6 *Soient X et Y deux vecteurs d'un espace vectoriel E. Démontrer que :*

$$(X \cdot Y)^2 + \|X \wedge Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2.$$

Exercice 5.4.7 *Soient E un espace vectoriel orienté. On désigne par $X \wedge Y$ le produit vectoriel de deux vecteurs X et Y de E.*
On note $X \wedge' Y$ le produit vectoriel de X et Y dans l'espace E lorsqu'on le munit de l'orientation opposée à la précédente.
Démontrer que $(\forall X \in E)$ $(\forall Y \in E)$ on a $X \wedge' Y = -X \wedge Y$

Exercice 5.4.8 *Soient P un plan vectoriel et $f : P \times P \to \mathbb{R}$, une application bilinéaire alternée. Montrer que l'image de f est une droite vectorielle de P.*

Exercice 5.4.9 *Soient A et B deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E.*

1. *Donner une condition nécessaire sur A et B pour qu'il existe $X \in E$ tel que $X \wedge A = B$.*

2. *On suppose que $A \cdot B = 0$. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}$des vecteurs $X \in E$ tels que*

$$X \wedge A = B.$$

Exercice 5.4.10 *Soit E un espace vectoriel ordinaire. On donne un repère orthonormé $(\mathcal{O}, i, j, k)$. Soient A et B deux points de E de coordonnées respectives $(-2, 1, 0)$ et $(2, -1, 1)$.*

1. (a) *Soit le point M de coordonnées (x, y, z). Déterminer les coordonnées du vecteur $(\overrightarrow{\mathcal{O}A} \wedge \overrightarrow{\mathcal{O}B}) \wedge \overrightarrow{\mathcal{O}M}$ en fonction de x, y et z.*
   (b) *Déterminer less équations de l'ensemble des points M vérifiant*

$$(\overrightarrow{\mathcal{O}A} \wedge \overrightarrow{\mathcal{O}B}) \wedge \overrightarrow{\mathcal{O}M} = k$$

2. *Soit C et D deux points de E de coordonnées respectives $(1, 3, 0)$ et $(-1, -10, -1)$. On affecte le point A de coefficient 2, le point B du coefficients 1, le point C du coefficient 3 et le point D du coefficient 1.*
   (a) *Déterminer le barycentre des quatre points A, B, C et D affectés de leurs coefficients respectifs.*
   (b) *Soit I le milieu du segment $[BD]$ et J le point vérifiant*

$$2\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JC} = 0_E$$

   Montrer que les points $\mathcal{O}$, I et J sont alignés.

3. *Déterminer l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\mathcal{O}A}, \overrightarrow{\mathcal{O}B}})$.*

Exercice 5.4.11 1. *U et W désigant deux vecteurs quelconques de l'espace vectoriel euclidien E de dimension 3, on demande de vérifier la relation*

$$(U \wedge W) \wedge W = (U \cdot W).W - \|W\|^2.U \tag{0.2}$$

On pourra pour cela supposer qu'une base orthonormée directe (i, j, k) de E est choisie de façon que, dans cette base, U ait pour coordonnées $(a, 0, 0)$ et $W(b, c, 0)$.

2. *On suppose que V et W sont deux vecteurs donnés et orthogonaux de E, avec $W \neq 0_E$.*
   (a) *Démontrer en utilisant la relation Eq.(0.2) qu'il existe un seul vecteur U_0 orthogonal à W tel que*

$$U_0 \wedge W = V.$$

   (b) *En déduire que l'ensemble des vecteurs U tels que $U \wedge W = V$, est défini par*

$$U = U_0 + \lambda W,$$

   avec λ est un réel.

Chapitre 6

Torseurs

6.1 Espace affine

6.1.1 Définitions et notations

Définition 6.1.1 *Soit* e *un espace vectoriel et* $\mathcal{E}$ *un ensemble non vide. On dit qu'on a défini sur* $\mathcal{E}$ *une structure d'***espace affine** *attaché à* E *si on a déterminé une application de* $E \times E$ *dans* $\mathcal{E}$*, notée en général*

$$(u, P) \longmapsto P \widehat{+} u, \quad \textit{pour} \quad u \in E \quad \textit{et} \quad P \in \mathcal{E},$$

vérifiant les axiomes suivaants :

(A_1) *:* $(\forall (u, v) \in E^2) \quad (\forall P \in \mathcal{E})$ *on a*

$$P \widehat{+} (u + v) = (P \widehat{+} u) \widehat{+} v \quad \textit{et} \quad P \widehat{+} 0_E = P,$$

(A_2) *:* $(\forall (P, Q) \in \mathcal{E}^2) \quad (\exists u \in E)$ *tel que* $Q = P \widehat{+} u$*,*

(A_3) *: le vecteur nul est le seul vecteur* u *vérifiant :*

$$(\forall P \in \mathcal{E}) P = P \widehat{+} u.$$

Un ensemble $\mathcal{E}$ muni d'une structure d'espace affine attaché à E est appelé **espace affine** (sur E). Très souvent, on fera un abus de notation en désignant cet espace affine par la même lettre $\mathcal{E}$. Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés points. L'espace vectoriel E est appelé un espace directeur de l'espace affine $\mathcal{E}$. On le notera parfois $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Si E est un espace vectoriel de dimension n, on dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine de dimension n (on note : $n = \dim(\mathcal{E})$). On appelle droite (resp. plan) affine tout espace affine de dimension 1 (resp. 2).

6.1.2 Exemples d'espaces affines

1. On suppose que E est l'espace vectoriel nul et que l'ensemble $\mathcal{E}$ est réduit à un élément A : $\mathcal{E} = \{A\}$.
   On définit une application $\varphi : E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $(u, P) \longmapsto P\widehat{+}u$, par $A\widehat{+}0_E = A$.
   Il est immédiat que φ vérifie les axiomes (A_1), (A_2) et (A_3).
   L'espace affine ainsi défini est de dimension zéro.

2. Soit E un espace vectoriel. On définit une application de $E \times E$ dans E, $(u, x) \longmapsto x\widehat{+}u$, en posant :

   $$x\widehat{+}u = x + u, \quad \text{si} \quad (u, x) \in E \times E.$$

   Le signe $+$ désigne ici l'addition dans l'espace vectoriel E.
   On vérifie aisément qu'on munit ainsi E d'une structure d'espace affine sur l'espace vectoriel E. On appellera **espace affine** E l'ensemble E mini de cette structure d'espace affine. On dit encore qu'on a muni l'espace vectoriel E de sa **structure naturelle d'espace affine**.

3. Prenons $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E} = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 / \lambda_1 = 1\}$. On définit l'application $\varphi : E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par :

   $$\varphi((u_1, u_2, u_3, u_4), (1, x_1, x_2, x_3)) = (1, x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3).$$

   On vérifiera facilement qu'on munit $\mathcal{E}$ d'une structure d'espace affine sur $\mathbb{R}^3$.

6.1.3 Propriétés des vecteurs d'un espace affine

Théorème 6.1.1 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur l'espace vectoriel E, A un point de $\mathcal{E}$ et u un vecteur de E tel que :*

$$A\widehat{+}u = A.$$

Alors u est le vecteur nul.

Corollaire 6.1.1 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur un espace vectoriel E et (P, Q) un élément de $\mathcal{E}^2$. Il existe un vecteur unique u de E tel que*

$$Q = P\widehat{+}u.$$

6.1.4 Bijection entre un espace affine et son espace directeur

Théorème 6.1.2 *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine d'espace directeur E. Pour tout $\mathbf{O} \in \mathcal{E}$, l'application*

$$\phi_{\mathbf{O}} : E \to \mathcal{E}, \quad v \longmapsto \mathbf{O} + v$$

est une bijection.

6.1.5 Repère cartésien

La notion de repère cartésien permet de ramener la résolution d'un problème sur les espaces affines (sous-espaces affines d'un espace affine) de dimension deux ou trois à la résolution d'un problème algébrique. Nous considérons, d'abord, un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3.

Définition 6.1.2 *On appelle repère cartésien de l'espace affine $\mathcal{E}$ tout quadruplet $(\mathbf{O}; i, j, k)$, où* **O** *est un point de $\mathcal{E}$ et (i, j, k) est une base de E.*
Les vecteurs i, j, k s'appellent **vecteurs de base** *du repère et le point* **O** *est appelé* **Origine** *du repère.*

Le théorème suivant est essentiel pour l'emploi de la notion de repère cartésien :

Théorème 6.1.3 *Soit $(\mathbf{O}; i, j, k)$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$. L'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{E}$ qui à tout triplet (x, y, z) de réels associe le point*

$$M = \mathbf{O}\widehat{+}(x.i + y.j + z.k)$$

est une bijection.

$$M = \mathbf{O}\widehat{+}(x.i + y.j + z.k) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathbf{O}M} = x.i + y.j + z.k$$

6.2 Applications Antisymétriques

1. **Définition 6.2.1** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 (isomorphe à $\mathbb{R}^3$) et $\mathcal{E}$ l'espace affine associé à E. Soit $\mathcal{L}$ l'application de $E \to E$, $u \mapsto \mathcal{L}(u)$. On dit que $\mathcal{L}$ est antisymétrique si et seulement si $(x, \mathcal{L}(y)) = -(y, \mathcal{L}(x))$.*
2. **Conséquence :** Toute application antisymétrique est linéare. En effet, soit x_1 et x_2 deux éléments de E et λ_1 et λ_2 deux réels.

$$\begin{aligned}
(y, \mathcal{L}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) &= -(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mathcal{L}(y)) \\
&= -(\lambda_1 x_1, \mathcal{L}(y)) - (\lambda_2 x_2, \mathcal{L}(y)) \\
&= -\lambda_1 (x_1, \mathcal{L}(y)) - \lambda_2 (x_2, \mathcal{L}(y)) \\
&= \lambda_1 (y, \mathcal{L}(x_1)) + \lambda_2 (y, \mathcal{L}(x_2)) \\
&= (y, \lambda_1 \mathcal{L}(x_1)) + (y, \lambda_2 \mathcal{L}(x_2)) \\
&= (y, \lambda_1 \mathcal{L}(x_1) + \lambda_2 \mathcal{L}(x_2))
\end{aligned}$$

   et ceci est vrai pour tout $y \in E$. D'où

$$\mathcal{L}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \mathcal{L}(x_1) + \lambda_2 \mathcal{L}(x_2).$$

3. **Expression analytique dans une base orthonormée directe :** Soit L la matrice associée à $\mathcal{L}$ dans une base orthonormée directe, notée (i, j, k).

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

L'application $\mathcal{L}$ est antisymétrique alors $(i, \mathcal{L}(i)) = -(i, \mathcal{L}(i))$ ce qui implique que $(i, \mathcal{L}(i)) = 0 = \alpha_{11}$.
De la même façon, on a $\alpha_{22} = (j, \mathcal{L}(j)) = 0$ et $\alpha_{33} = (k, \mathcal{L}(k)) = 0$ ceci d'une part,
et d'autre part

$$(i, \mathcal{L}(j)) = -(j, \mathcal{L}(i)) \Leftrightarrow \alpha_{12} = -\alpha_{21}$$
$$(i, \mathcal{L}(k)) = -(k, \mathcal{L}(i)) \Leftrightarrow \alpha_{13} = -\alpha_{31}$$
$$(j, \mathcal{L}(k)) = -(k, \mathcal{L}(j)) \Leftrightarrow \alpha_{23} = -\alpha_{32}$$

D'où on a

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23} \\ -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vecteur, on a

$$\mathcal{L}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{21} & -\alpha_{31} \\ \alpha_{21} & 0 & -\alpha_{32} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{L}(x) = \begin{pmatrix} -\alpha_{21}x_2 - \alpha_{31}x_3 \\ \alpha_{21}x_1 - \alpha_{32}x_3 \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathcal{L}(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{32} \\ -\alpha_{31} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Posons $\overrightarrow{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \alpha_{32} \\ -\alpha_{31} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}$, alors $\mathcal{L}(x) = \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge x$.
Le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ est le vecteur de l'application antisymétrique $\mathcal{L}$.

6.3 Champ antisymétrique

1. **Définition 6.3.1** *Un champ de vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est une application qui associe à tout point M de $\mathcal{E}$, le vecteur x de E.*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} : \mathcal{E} \longrightarrow E, \quad M \longmapsto \overrightarrow{\mathcal{M}}(M) = x.$$

$\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est un champ antisymétrique s'il existe une application antisymétrique $\mathcal{L}$ tel que pour tous A et B de $\mathcal{E}$ on a

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(B) + \mathcal{L}(\overrightarrow{BA})$$

où bien

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(B) + \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{BA}.$$

2. **Champ équiprojectif :**

$$\overrightarrow{\mathcal{M}} \quad \text{est équiprojectif} \ \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(M) = \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(P).$$

On peut montrer que tout champ équiprojectif est antisymétrique et réciproquement.

6.4 Torseurs

1. **Définition 6.4.1** *On appelle torseur $[\mathcal{T}]$ l'ensemble du champ de vecteurs antisymétrique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ et de son vecteur $\overrightarrow{\mathcal{R}}$.*

   – *$\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est appelé le moment de $[\mathcal{T}]$ et $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ est son vecteur où bien sa résultante.*
   – *La connaissance de $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ en 0 et la résultante $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ détermine le champ en tout point $P \in \mathcal{E}$:*

   $$\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP}.$$

   Notation : $[\mathcal{T}]_P \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) \end{array} \right.$

   $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(P)$ sont les éléments de réduction de $[\mathcal{T}]$ (où bien ses coordonnées).

2. **Propriétés des torseurs :** Soient $[\mathcal{T}_1]_P \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(P) \end{array} \right.$ et $[\mathcal{T}_2]_P \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(P) \end{array} \right.$

   (a) **L'égalité de deux torseurs :**

   $$[\mathcal{T}_1]_P = [\mathcal{T}_2]_P \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 = \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(P) \end{array} \right.$$

   (b) **La somme de deux torseurs :**

   $$[\mathcal{T}]_P = [\mathcal{T}_1]_P + [\mathcal{T}_2]_P \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 + \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(P) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(P) \end{array} \right.$$

   (c) **Multiplication par un scalaire :** Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $[\mathcal{T}]_P \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) \end{array} \right.$ un torseur. Alors

   $$\lambda[\mathcal{T}]_P = (\lambda\mathcal{T})_P \left\{ \begin{array}{l} \lambda\overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \lambda\overrightarrow{\mathcal{M}}_2(P) \end{array} \right.$$

   Les deux lois de composition confèrent à l'ensemble des torseurs de notion d'espace vectoriel. C'est-à-dire que l'ensemble des torseurs muni des lois $''+''$ et $''\times''$ est un espace vectoriel.

   (d) **Torseur nul :** $[\mathcal{T}]_P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \vec{0} \end{array} \right.$

3. **Invariant scalaire d'un torseur :** Soit $[\mathcal{T}]_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) \end{array} \right.$ un torseur.

   L'invariant scalaire, noté $\mathcal{I}$, est défini par la quantité scalaire

   $$\mathcal{I} = \overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(O).$$

   $\mathcal{I}$ est indépendant de O : En effet, soit $O \neq O'$ on a

   $$\mathcal{I}' = \overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(O') = \overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OO'}\right) = \overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OO'}\right)$$

   Or $\overrightarrow{\mathcal{R}} \perp \left(\overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OO'}\right)$, alors $\overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OO'}\right) = 0$
   Donc

   $$\mathcal{I}' = \overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \mathcal{I}.$$

4. **Invariant vectoriel d'un torseur :** L'invariant vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{I}_V}$ est défini comme suit

$$\overrightarrow{\mathcal{I}_V} = \frac{\overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)}{\|\overrightarrow{\mathcal{R}}\|^2}.\overrightarrow{\mathcal{R}} = \frac{\mathcal{I}}{\|\overrightarrow{\mathcal{R}}\|^2}.\overrightarrow{\mathcal{R}}$$

$\overrightarrow{\mathcal{I}_V}$ est indépendant de O. C'est la projection orthogonale de $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O)$ sur $\overrightarrow{\mathcal{R}}$.

5. **Produit de deux torseurs où bien moment :**
Soient $[\mathcal{T}_1]_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(O) \end{array} \right.$ et $[\mathcal{T}_2]_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(O) \end{array} \right.$ deux torseurs.
Le **moment** de $[\mathcal{T}_1]$ et $[\mathcal{T}_2]$ est la quantité scalaire suivante :

$$\mathcal{P} = \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(O).$$

Le moment $\mathcal{P}$ est indépendant de O. En effet, soit $O' \neq O$, on a

$$\mathcal{P}' = \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(O') + \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(O') = \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}_2(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \wedge \overrightarrow{OO'}\right) + \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{M}}_1(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \wedge \overrightarrow{OO'}\right)$$

Après le developpement, on obtient

$$\mathcal{P}' = \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \wedge \overrightarrow{OO'}\right) + \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \wedge \overrightarrow{OO'}\right)$$

or $\overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \wedge \overrightarrow{OO'}\right) = -\overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \cdot \left(\overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \wedge \overrightarrow{OO'}\right)$, alors

$$\mathcal{P}' = \overrightarrow{\mathcal{R}}_1 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_2(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}}_2 \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}_1(O) = \mathcal{P}$$

6.5 Axe central d'un torseur

1. **Division vectorielle :** On propose de déterminer $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $\quad (\diamondsuit) \quad x \wedge a = b$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ est donné. On a a et x sont orthogonaux à b.
D'après le graphique, on a $x = x_1 + x_2 = \lambda a + x_2$,_ Or $x_2 \perp a$ et $x_2 \perp b$ alors $x_2 = \alpha(a \wedge b)$.
Déterminons α **:** on a

$$[\lambda a + \alpha(a \wedge b)] \wedge a = b \quad \Leftrightarrow \quad \lambda\, a \wedge a + \alpha(a \wedge b) \wedge a = b$$

or, $a \wedge a = \vec{0}$ alors

$$\alpha(a \wedge b) \wedge a = b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha[(a \cdot a)b - (a \cdot b)a] = b \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\|a\|^2}$$

Finalement :

$$x = \lambda a + \frac{1}{\|a\|^2}\, a \wedge b$$

$$x = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON_0} + \overrightarrow{N_0N} = \lambda a + \frac{1}{\|a\|^2}.a \wedge b$$

avec

$$\overrightarrow{ON_0} = \frac{1}{\|a\|^2}\, a \wedge b \quad \text{et} \quad \overrightarrow{N_0N} = \lambda\, a$$

alors, an a

$$\|\overrightarrow{ON}\| = \frac{\|b\|}{\|a\|} \quad \text{puisque} \quad a \perp b$$

Donc les solutions de l'équation $(\diamondsuit)$ sont les vecteurs $x = \overrightarrow{ON}$ où le point N décrit la droite $(\triangle)$ dont le vecteur directeur a.
$\overrightarrow{ON_0}$ est la solution particulière lorsque $\lambda = 0$.

2. **Axe central d'un torseur :** Soit $[\mathcal{T}]_P = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) \end{array} \right.$ un torseur.

   L'axe central $(\triangle)$ de $[\mathcal{T}]$ est l'ensemble des points P tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}}(P)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathcal{R}}$:

   $$(\triangle) := \{P \in \mathcal{E} \;:\; \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \alpha \overrightarrow{\mathcal{R}} \;\alpha \in \mathbb{R}\}$$

   On sait que

   $$\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) + \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{\mathcal{R}}$$

   alors

   $$\overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) - \alpha \overrightarrow{\mathcal{R}}.$$

   D'après la division vectorielle, on a

   $$\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{\mathcal{R}} + \frac{1}{\|\overrightarrow{\mathcal{R}}\|^2} \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge [\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) - \alpha \overrightarrow{\mathcal{R}}] = \lambda \overrightarrow{\mathcal{R}} + \frac{1}{\|\overrightarrow{\mathcal{R}}\|^2} \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(O).$$

   Dnc l'axe central est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ et qui passe par le point P_0 tel que

   $$\overrightarrow{OP_0} = \frac{1}{\|\overrightarrow{\mathcal{R}}\|^2} \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathcal{M}}(O).$$

6.6 Exemples de torseurs

1. **Le couple :** Un torseur non nul $[\mathcal{T}]_O = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) \end{array} \right.$ est un **couple** si $\overrightarrow{\mathcal{R}} = \vec{0}$, on a alors

   $$\forall (P, Q) : \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(Q).$$

   Le champ de vecteurs antisymétrique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est uniforme.
   Notation : $[\mathcal{T}] = [\mathcal{C}]$.

2. **Le Glisseur :**

   (a) **Définition 6.6.1** *Soit $(A, \vec{f})$ un vecteur lié (un vecteur dont on a précisé l'origine). Le vecteur $(A, \vec{f})$ "glisse" le long de l'axe (δ), appelé le support de $\vec{f}$. $(A, \vec{f})$ est un vecteur* ***glissant****.*
   Soit P un point quelcnque, on a

   $$\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{f} = \vec{f} \wedge \overrightarrow{AP}.$$

Or $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est antisymétrique : $\overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \vec{f} \wedge \overrightarrow{AP}$ avec $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \vec{0}$.
Dans ce cas, on dit que $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ définit un torseur appelé **glisseur** *et qu'on va noter $[G]$:*

$$[G]_P = \begin{cases} \vec{f} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) \end{cases} \quad \textit{avec} \quad \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \vec{0} \quad (\textit{car } A \in \delta).$$

Conséquence : Pour yout $A' \in \delta$ avec $A' \neq A$, on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A') = \vec{0}$.
En effet,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(A') = \overrightarrow{\mathcal{M}}(A) + \vec{f} \wedge \overrightarrow{AA'}$$

or $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \vec{0}$ et $\vec{f} \wedge \overrightarrow{AA'} = \vec{0}$ puisque $\vec{f}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires.
Un glisseur est caractérisé par le fait que tous les points de δ ont un **moment nul**.

(b) **Axe central d'un glisseur :**

$$\begin{aligned} \triangle &= \{P \in \mathcal{E} \ / \ \overrightarrow{\mathcal{M}}(P) = \alpha\vec{f} = \vec{f} \wedge \overrightarrow{OP}\} \\ &= \{P \in \mathcal{E} \ / \ \overrightarrow{OP} = \lambda\vec{f} + \frac{1}{\|\vec{f}\|^2}\vec{f} \wedge (-\alpha\vec{f})\} \end{aligned}$$

d'où

$$\triangle = \{P \in \mathcal{E} \ / \ \overrightarrow{OP} = \lambda\vec{f}\} = \delta.$$

c'est-à-dire que l'axe central (Δ) d'un glisseur est le support (δ) du vecteur $\vec{f}$.

(c) **Propriété caractéristique d'un glisseur :**

- Pour qu'un torseur soit un glisseur, il faut que sa résultante $\overrightarrow{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = 0$ et l'invariant scalaire $\mathcal{I} = 0$.
- Si un torseur de résultante $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ a un moment nul en un point A, alors ce torseur est un glisseur associé au vecteur lié au glissant $(A, \overrightarrow{\mathcal{R}})$.

6.7 Décomposition d'un torseur

On propose de montrer qu'un torseur soit un couple, soit un glisseur et ou soit la somme d'un couple et d'un glisseur.

1. **L'invariant scalaire est nul :** $\mathcal{I} = \overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = 0$ dans les cas suivants

1^{er}cas : $\overrightarrow{\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$, il s'agit donc d'un torseur nul.

2^{eme}cas : $\overrightarrow{\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) \neq \vec{0}$, alors le torseur est un couple.

3^{eme}cas : $\overrightarrow{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \vec{0}$, alors le torseur est un glisseur associé au vecteur glissant $(O, \overrightarrow{\mathcal{R}})$.

4^{eme}cas : $\overrightarrow{\mathcal{R}} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O) \neq \vec{0}$, alors $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O)$ sont orthogonaux. Donc on peut trouver un point A tel que

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O)$$

D'où le torseur $[\mathcal{T}]$ est un glisseur puisque $\overrightarrow{\mathcal{M}}(A) = \vec{0}$

2. **L'invariant scalaire est non nul :** $\mathcal{I} = \overrightarrow{\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) \neq 0$, alors le torseur $[\mathcal{T}]$ peut être décomposé en la somme d'un couple
$$[\mathcal{C}]_O = \begin{cases} \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) \end{cases}$$
et d'un glisseur
$$[G]_O = \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{R}} \\ \vec{0} \end{cases}$$
Lorsque $\overrightarrow{\mathcal{M}}(O)$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathcal{R}}$, alors la décomposition est dite **centrale**.
3. **Tableau récapitulatif :**

TABLE 6.1 – La décomposition d'un torseur selon les cas existants dans la pratique.

Eléments de réduction	**Torseur associé**
$\overrightarrow{\mathcal{R}} = \vec{0} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) \;\Rightarrow\; \mathcal{I} = 0$	Torseur nul
$\overrightarrow{\mathcal{R}} = \vec{0}, \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) \neq \vec{0} \Rightarrow\; \mathcal{I} = 0$	Le torseur est un couple
$\overrightarrow{\mathcal{R}} \neq \vec{0}, \overrightarrow{\mathcal{M}}(O) = \vec{0} \Rightarrow\; \mathcal{I} = 0$	Le torseur est un glisseur
$\mathcal{I} \neq 0$	Le torseur est la somme d'un glisseur et d'un couple.

Bibliographie

[1] J.M. Arnaudiès et H. Fraysse. *Cours de mathématiques-1 :Algèbre*, 1^{er} cycle universitaire, Dunod, Paris, 1996.

[2] Arnaudiès J. M., Boursin J. L. et G. Goeringer, *Mathématiques*, terminale D, Paris, 1976.

[3] Arnaudiès J. M. et H. Fraysse, *Algèbre*, cours de mathématiques-1. Dunod, Paris, 1987.

[4] Deschamps C. et A. Warusfel, *Algèbre*, Mathématiques 1^{re} année : Cours et exercices corrigés, MPSI, PCSI, PTSI. Dunod, Paris, 1999.